



**Facultad  
de  
Ciencias**

**LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN VARIAS  
VARIABLES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO  
DE LAS EDPs**

**(The Fourier Transform in several variables and its applications to  
the study of PDEs)**

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autor: Víctor Lázaro Julián

Directora: Diana Stan

Octubre-2020



# Agradecimientos

*A mis padres y mi hermana, por haberme apoyado en todo momento y por haber confiado siempre en mí. A María, por haber estado siempre a mi lado.*

*A mi familia, por su incondicional ayuda y cariño. A mis amigos, porque siempre han estado ahí cuando se les necesitaba.*

*A Diana Stan, por haberme ayudado durante estos meses y a todos los profesores, por su esfuerzo y dedicación.*

*Gracias a todos.*



# Abstract

In this project we will study the Fourier transform in several variables. We will prove several of its properties that we will use later to compute the Fourier transform of certain known functions. Later, we will study some classical partial differential equations that we will solve, with the help of the Fourier Transform, such as the Linear Schrödinger Equation, the Heat Equation, the Korteweg-de Vries Equation, the Wave Equation and the Telegraph Equation.

**Key words:** Fourier transform, inverse Fourier transform, partial differential equation, fundamental solution, Linear Schrödinger Equation, Heat Equation, Korteweg-de Vries Equation, Wave Equation, Telegraph Equation.

# Resumen

En este trabajo realizaremos un estudio de la transformada de Fourier en varias variables. Demostraremos varias de sus propiedades que luego utilizaremos para calcular la transformada de Fourier de ciertas funciones conocidas. Más tarde estudiaremos algunas ecuaciones en derivadas parciales clásicas que resolveremos, ayudándonos de la Transformada de Fourier, como son la Ecuación Lineal de Schrödinger, la Ecuación del Calor, la Ecuación de Korteweg-de Vries, la Ecuación de Ondas y la Ecuación del Telégrafo.

**Palabras clave:** transformada de Fourier, transformada de Fourier inversa, ecuaciones en derivadas parciales, solución fundamental, Ecuación Lineal de Schrödinger, Ecuación del Calor, Ecuación de Korteweg-de Vries, Ecuación de Ondas, Ecuación del Telégrafo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier . . . . .	1
1.2. El legado de Fourier . . . . .	3
1.3. La transformada de Fourier . . . . .	4
1.4. Aplicaciones de la transformada de Fourier . . . . .	4
<b>2. La transformada de Fourier</b>	<b>5</b>
2.1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	5
2.1.1. Cálculo de la transformada de Fourier de diversas funciones . . . . .	10
2.1.2. La transformada de Fourier y las derivadas . . . . .	15
2.1.3. La transformada de Fourier inversa . . . . .	17
2.2. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	19
<b>3. Aplicaciones para el estudio de las EDPs</b>	<b>25</b>
3.1. Ecuación Lineal de Schrödinger . . . . .	25
3.2. Ecuación del Calor . . . . .	27
3.3. Ecuación de Korteweg-de Vries . . . . .	30
3.4. Ecuación de Ondas . . . . .	34
3.5. Ecuación del Telégrafo . . . . .	40
<b>4. Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>5. Anexo</b>	<b>49</b>
5.1. Los espacios $L^p$ . . . . .	49
5.2. Cálculo de integrales utilizadas en el trabajo . . . . .	50
5.3. Notaciones con respecto a las derivadas . . . . .	53
5.4. Delta de Dirac . . . . .	53
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Jean-Baptiste Joseph Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier nació en la ciudad francesa de Auxerre, al sudeste de París, el 21 de marzo de 1768. Fue el noveno hijo del segundo matrimonio de su padre, Joseph Fourier, que era un humilde sastre, y en total tuvo once hermanos de padre y madre, y tres por parte de padre. Su niñez estuvo marcada por las dificultades económicas que atravesaba la familia y la pérdida de seis hermanos y de sus padres, quedando huérfano a la temprana edad de 10 años. El destino parecía otorgarle una vida llena de desgracias, pero la educación fue su salvación. Fue adoptado por Joseph Pallais, organista del templo de su ciudad natal, quien le enseñó las primeras letras. Estudió los primeros años en la escuela preparatoria hasta que en 1780 ingresó en la Escuela Real Militar de Auxerre, donde impresionó a varias personalidades por su rapidez mental. En Francia sólo había once colegios como éste. En estas escuelas se daba gran importancia a la enseñanza de las matemáticas. Todos estos centros competían para ver cual de ellos alcanzaba un mayor prestigio. Para ello, había un grupo de inspectores controlando dichos centros, uno de ellos era Adrien-Marie Legendre, quien hizo grandes contribuciones a la teoría de números, al análisis matemático, al álgebra abstracta y a la estadística, entre otros campos. Para la enseñanza de las matemáticas, se utilizaban los libros de Bezout.



Figura 1.1: Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier

Fourier era un alumno brillante. Comenzó destacando en literatura, debido a la gran facilidad

que tenía para expresarse. Esto le fue muy útil durante toda su vida en su carrera política. Pero pronto empezó a interesarse por las matemáticas, a las cuáles dedicaba noches enteras.

En 1789 llegó la Revolución Francesa. Fourier, que intentó atrasar su implicación en las revueltas mediante la enseñanza de las matemáticas en la Escuela Real Militar, acabó participando en la política en 1793. Tomó parte del comité de vigilancia de Auxerre, encargados de investigar posibles acciones contrarrevolucionarias, del que luego intentó dimitir. En 1794, fue arrestado y estuvo a punto de ser guillotinado. Poco después ingresó en la Escuela Normal Superior de París, donde conoció a ilustres matemáticos como Joseph-Louis de Lagrange o Pierre-Simon de Laplace. Fourier se encontraba en París, meca de las matemáticas del siglo XVIII, y quería aprovecharlo. El objetivo de sus investigaciones eran la resolución de problemas de la física con ayuda de las matemáticas. Durante toda su vida pensó que el estudio de la naturaleza era la fuente más fértil de los descubrimientos matemáticos. Fourier encontró una gran motivación en el estudio del *problema de la cuerda vibrante*. Problema formulado por Brook Taylor, se trata de obtener una expresión matemática del movimiento de una cuerda elástica. Brook Taylor llegó a la conclusión de que el movimiento de un punto cualquiera de dicha cuerda es el de un péndulo simple, por lo que la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es una sinusoidal. En este trabajo, aparecieron de forma natural, los desarrollos en series trigonométricas por primera vez, que luego utilizaría Fourier en sus estudios sobre la conducción del calor. En esta época también ocupó una plaza como profesor de la Escuela Politécnica.

Fourier participó en la expedición de Napoleón a Egipto en 1798 donde dirigió alguna exploración en el Alto Egipto. Fourier regresó a Francia en 1801, y en 1802 fue nombrado prefecto del Departamento de Isère.

A partir de 1802, cuando ya vivía en Grenoble, se dedicó al estudio de la distribución del calor en sólidos conductores. Después de leer un artículo de Jean-Baptiste Biot, en la que estudiaba el problema para una barra de metal muy larga y delgada, su interés aumentó. En este artículo, Biot había fallado a la hora de deducir la ecuación del calor de manera correcta, por lo que su trabajo fue más experimental que analítico. Johann Heinrich Lambert logró una visión más general del problema encontrando argumentos a favor de un decrecimiento logarítmico de la temperatura con la distancia.

En 1807, presentó ante la Academia de Ciencias de París una memoria sobre la propagación del calor en cuerpos sólidos, *Teoría de la propagación del calor en los sólidos*, en la cual modelaba la evolución de la temperatura a través de series trigonométricas. La falta de rigor y la simplificación excesiva hizo que numerosos matemáticos le debatiesen de una manera muy fuerte su trabajo. Entre ellos se encontraban Laplace y Lagrange.

En 1811, obtuvo el Gran Premio de la Academia de Ciencias por su *Teoría del movimiento del calor en los sólidos*, versión revisada y ampliada de la de 1807.

Fourier se convierte en miembro de la Academia de Ciencias en 1817.

Hasta 1822, no publicó *Teoría analítica del calor* después de pasar a ser Secretario Perpetuo de la Academia de Ciencias. Esta es una de las obras más importantes de la ciencia y la tecnología, y es considerada como un documento fundamental de la física teórica y de la rama de las matemáticas que hoy denominamos como análisis de Fourier.

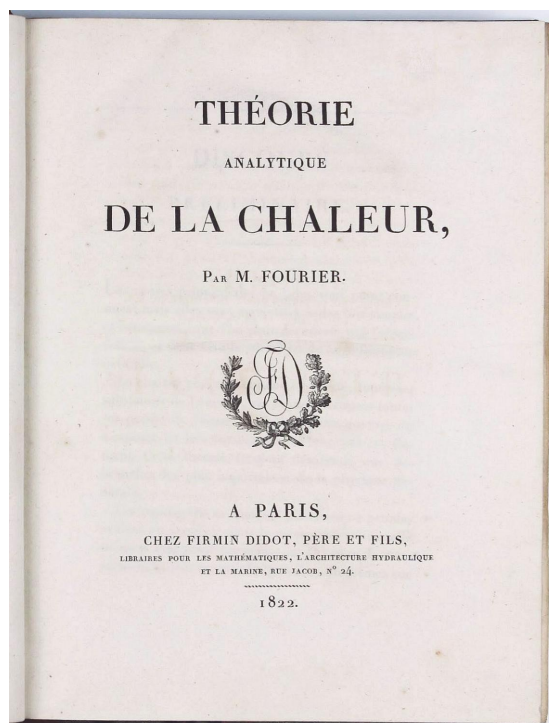


Figura 1.2: Portada de *Teoría analítica del calor*

En este libro, Fourier establece la ecuación en derivadas parciales que modela la conducción del calor. Concretamente para la conducción en el interior de un sólido. Las soluciones a dichas ecuaciones las realiza mediante el uso de series infinitas de funciones trigonométricas, es decir, la representación de cualquier función como series de senos y cosenos, ahora denominadas *Series de Fourier*.

En 1823 fue nombrado miembro extranjero de la Royal Society de Londres y en 1827 sustituyó a Laplace como Presidente del Consejo de Perfeccionamiento de la Escuela Politécnica.

Los últimos cinco años de su vida los pasó enfermo de manera intermitente hasta que el 16 de mayo de 1830 falleció.

## 1.2. El legado de Fourier

El desarrollo de las ideas de Fourier ha generado una gran cantidad de aportaciones a la Física y a las Matemáticas. Su efecto en la matemática pura se puede observar en temas tan variados como el análisis complejo, la teoría de grupos o la teoría analítica de números. Además, estas ideas son la base de importantes desarrollos en la tecnología que a día de hoy disfrutamos.

Uno de los campos donde se puede ver su contribución es en la acústica (física del sonido). Fourier entendía cualquier sonido como superposición de armónicos, es decir, toda señal sonora se puede descomponer en una suma de ondas que oscilan con una frecuencia bien definida y con total regularidad. Fourier aplicó estas ideas en su estudio de la ecuación del calor.

Uno de sus principios matemáticos más importantes fue el llamado *Teorema de convolución*. La convolución de señales es la manera matemática de llamar a los filtros de ondas. Para las aplicaciones, interesa conocer la versión en frecuencias de las señales que se quieren estudiar.

Por lo tanto, será muy útil tener dispositivos que filtren las señales, eliminando algunas frecuencias y dejando pasar otras. Esto se consigue multiplicando la transformada de Fourier de la señal estudiada por una función que tome siempre el valor 1 en las frecuencias que no queremos eliminar y 0 en las otras.

Lo mismo que ocurría con el sonido, ocurre con la luz, que es una onda electromagnética. La llamada *Óptica de Fourier* (basada en la transformada de Fourier), considera cada haz de luz del plano como una distribución de luz, pero también una distribución de luz en el plano transformado donde cada punto se corresponde a una frecuencia.

Una de las aplicaciones de sus ideas fue en el llamado análisis en tiempo-frecuencia. Aquí lo que se trataba de identificar era, en un intervalo de tiempo muy corto, qué frecuencias estaban interviniendo en ese instante en la formación de la señal.

Sus ideas también han sido útiles para el tratamiento digital de imágenes donde se utiliza la transformada de Fourier para la mejora de imágenes o definir más alguna zona de una imagen.

Un avance muy importante utilizando todas estas ideas ha sido la *tomografía axial computarizada* (TAC).

### 1.3. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier surgió al intentar extender el análisis en frecuencias en el dominio del tiempo. Fue denominada así por Jean-Baptiste Joseph Fourier y es una transformación matemática utilizada para transformar las señales entre el dominio del tiempo (espacial) y el de la frecuencia. En otras palabras, la transformada de Fourier es el espectro de frecuencias de una función. Una de las funciones se transforma en otra. Tiene la propiedad de ser reversible, es decir, se puede transformar desde cualquiera de los dominios al otro, haciendo el proceso inverso.

### 1.4. Aplicaciones de la transformada de Fourier

En todos los avances que hemos hablado, en el apartado *El legado de Fourier*, sobre las ideas de Fourier, se utiliza la transformada de Fourier. Tiene muchas aplicaciones en ciencia e ingeniería. Dentro de la ciencia ya hemos explicado que se utiliza en la física del sonido y la acústica, pero también tiene aplicaciones en combinatoria, estadística, teoría de la probabilidad y en la teoría de números. En sus aplicaciones en ingeniería, destaca en el procesamiento de señales, que es una aplicación directa de los avances que supusieron en física, donde se considera la descomposición de una señal en frecuencias distintas. En matemáticas, la rama que estudia las series de Fourier y la transformada de Fourier y sus generalizaciones, se llama *análisis de Fourier* o *análisis armónico*. En este trabajo vamos a centrarnos en la parte matemática de la transformada de Fourier (Capítulo 2) y en las aplicaciones que tiene para poder resolver EDP's (Capítulo 3).

# Capítulo 2

## La transformada de Fourier

Con la ayuda de las primeras definiciones del anexo, vamos a estudiar la transformada de Fourier en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  y posteriormente en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . En este trabajo consideramos funciones con valores reales  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . No obstante, en algunos resultados aparece el símbolo de conjugado complejo, para enfocar que el resultado se puede extender a funciones con valores complejos.

### 2.1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

#### Definición 2.1.1

La transformada de Fourier de una función  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , que denotamos por  $\hat{f}$ , está definida para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x, \quad (2.1.1)$$

para  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , donde  $(x \cdot \xi) = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$  y  $d^n x = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ .

Podemos tener distintas expresiones para la transformada de Fourier, al igual que en  $\mathbb{R}$ :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x \cdot \xi)} d^n x. \quad (2.1.2)$$

Pero en este trabajo vamos a utilizar la expresión (2.1.1). También nos podemos encontrar con otra notación distinta para referirnos a la transformada de Fourier, como es  $\mathcal{F}(f)(\xi)$ , aunque en este trabajo adoptaremos mayormente la expresión  $\hat{f}$ , salvo en algunos casos en los que no quede muy claro cual es la función a la que estamos haciendo su transformada, como por ejemplo en funciones muy largas.

#### Proposición 2.1.1

- (1) La aplicación  $\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $f \mapsto \hat{f}$  define una transformación lineal de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  en  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Además, si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \geq 0$  en casi todo punto y se tiene que:

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \|f\|_1.$$

si  $f \geq 0$  en casi todo punto.

Demostración:

Como  $|e^{ir}| = 1$  para cualquier número real  $r$ , tenemos que:

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)}| d^n x \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x = \|f\|_1,$$

donde la última igualdad se obtiene por la definición de norma en el espacio  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

□

- (2) Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces  $\hat{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es continua.

Demostración:

Sea  $\epsilon > 0$  y sea  $B_R$  una bola de radio  $R$  y centro el origen tal que

$$\int_{B_R^c} |f(x)| d^n x \leq \epsilon.$$

Es posible escoger una bola así porque  $f$  es integrable,  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| &\leq \int_{B_R} |f(x)| |e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} - e^{-2\pi i(x \cdot \eta)}| d^n x \\ &\quad + \int_{B_R^c} |f(x)| |e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} - e^{-2\pi i(x \cdot \eta)}| d^n x \\ &\leq \int_{B_R} |f(x)| |e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} - e^{-2\pi i(x \cdot \eta)}| d^n x + 2\epsilon, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta porque

$$\int_{B_R^c} |f(x)| d^n x \leq \epsilon \quad y \quad \int_{B_R^c} |e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} - e^{-2\pi i(x \cdot \eta)}| d^n x \leq 2.$$

Sabemos que  $e^{-2\pi i r}$  es una función uniformemente continua para cualquier número real  $r$  en cualquier conjunto compacto, por ser una función continua en un conjunto compacto.

Si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon)$  tal que  $|x \cdot \xi - x \cdot \eta| < \delta$ , es decir,  $|x||\xi - \eta| < \delta$ , entonces podemos asegurar que

$$\max_{x \in B_R} |e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} - e^{-2\pi i(x \cdot \eta)}| \leq \epsilon.$$

Sería suficiente con tener  $R|\xi - \eta|$  lo suficientemente pequeño, luego  $R|\xi - \eta| < \delta$ . Por tanto, si  $R|\xi - \eta| < \frac{\delta}{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |f(x)| |e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} - e^{-2\pi i(x \cdot \eta)}| d^n x &\leq \max_{x \in B_R} |e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} - e^{-2\pi i(x \cdot \eta)}| \int_{B_R} |f(x)| d^n x \leq \\ &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x = \epsilon \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

- (3) (*Lema de Riemann-Lebesgue*)

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Entonces

$$|\hat{f}(\xi)| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \longrightarrow \infty.$$

Demostración:

Supongamos que  $f(x) = \mathcal{X}_{(a,b)}(x)$  que es la función característica de un intervalo.

$$\mathcal{X}_{(a,b)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{si } x \notin (a,b) \end{cases}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx = \int_a^b e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx = \int_a^b (\cos(2\pi x\xi) - i \sin(2\pi x\xi)) dx \\ &= \int_a^b \cos(2\pi x\xi) dx - i \int_a^b \sin(2\pi x\xi) dx = \frac{\sin(2\pi x\xi)}{2\pi\xi} \Big|_a^b - i \left( -\frac{\cos(2\pi x\xi)}{2\pi\xi} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2\pi\xi} [\sin(2\pi\xi b) - \sin(2\pi\xi a) + i \cos(2\pi\xi b) - i \cos(2\pi\xi a)] \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Por la aditividad de los límites, ocurre lo mismo para una función arbitraria simple, es decir, cualquier función  $f$  de la forma:

$$f = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \chi_{(a_i, b_i)} \quad \text{con } c_i \in \mathbb{R}, \quad a_i \leq b_i \in \mathbb{R}.$$

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  arbitraria. Demostramos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tal que } \left| \int f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx \right| < \epsilon, \quad \forall |\xi| > N.$$

Como las funciones simples son densas en  $L^1$ , entonces dado  $\epsilon > 0$ , existe una función simple  $g$  tal que

$$\|f - g\|_1 = \int |f(x) - g(x)| dx < \epsilon.$$

Se llama función simple por ser una suma finita de funciones características. Por los argumentos anteriores y la definición de límite de una función compleja, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $|\xi| > N$  se tiene que:

$$\left| \int g(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx \right| < \epsilon.$$

Por la aditividad de las integrales tenemos:

$$\int f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx = \int (f(x) - g(x)) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx + \int g(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx.$$

Por la desigualdad triangular tenemos:

$$\begin{aligned}\left| \int f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx \right| &\leq \left| \int (f(x) - g(x)) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx \right| \leq \int |f(x) - g(x)| dx + \left| \int g(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx \right| \\ &\leq \int |f(x) - g(x)| dx + \int |g(x)| dx = \int |f(x)| dx < \epsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, para todo  $|\xi| > N$ , se tiene que:

$$\left| \int |f(x) - g(x)| dx + \left| \int g(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx \right| < 2\epsilon.\right.$$

Y por tanto concluimos que:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx = 0,$$

para todo  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

□

- (4) Sean  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\tau_h : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\tau_h(f)(x) = f(x - h)$  la traslación por  $h \in \mathbb{R}^n$ . Entonces:

$$(4.1) \quad \widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i(h \cdot \xi)} \hat{f}(\xi).$$

$$(4.2) \quad \mathcal{F}(e^{-2\pi i(x \cdot h)} f)(\xi) = (\tau_{-h} \hat{f})(\xi) \text{ siendo } (\tau_{-h} \hat{f})(\xi) = \hat{f}(\xi + h).$$

Demostración:

Vamos a ver primero la propiedad (4.1).

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x.$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:  $z = x - h$ ,  $d^n z = d^n x$  y obtenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_h f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i((z + h) \cdot \xi)} d^n z = e^{-2\pi i(h \cdot \xi)} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i(z \cdot \xi)} d^n z \\ &= e^{-2\pi i(h \cdot \xi)} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Veamos ahora la propiedad (4.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-2\pi i(x \cdot h)} f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x \cdot h)} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x(\xi + h)} d^n x \\ &= \hat{f}(\xi + h) = (\tau_{-h} \hat{f})(\xi), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por la definición.

□

- (5) Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Si  $(\delta_a f)(x) = f(ax)$  denota el operador dilatación para  $a > 0$ , entonces:

$$\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n} \hat{f}(a^{-1} \xi).$$

Demostración:

$$\text{Como } (\delta_a f)(x) = f(ax), \text{ entonces } \widehat{(\delta_a f)}(\xi) = \hat{f}(ax)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x.$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:  $ax = y$ ,  $d^n x = \frac{d^n y}{a^n}$ , y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{(\delta_a f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i(\frac{y}{a} \cdot \xi)} \frac{d^n y}{a^n} = \frac{1}{a^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i(\frac{y}{a} \cdot \xi)} d^n y \\ &= a^{-n} \hat{f}\left(\frac{1}{a} \xi\right) = a^{-n} \hat{f}(a^{-1} \xi). \end{aligned}$$

□

- (6) Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y sea  $f * g$  el producto de convolución de  $f$  y  $g$  definido de la siguiente forma:

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(z - x) d^n x.$$

Entonces tenemos la siguiente propiedad:

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$



Demostración:

Sea  $h = f * g$ . Entonces se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(z-x)| d^n z d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(z-x)| d^n z \right) d^n x.$$

Nos fijamos en la integral  $\int_{\mathbb{R}^n} |g(z-x)| d^n z$ , hacemos el siguiente cambio de variable:  $z-x = u$ ,  $dz = du$  y obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(z-x)| d^n z = \int_{\mathbb{R}^n} |g(u)| d^n u = \|g\|_1.$$

Y como por definición de norma en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x = \|f\|_1$ , entonces tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(z-x)| d^n z d^n x = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Por tanto, por el Teorema de Fubini, que dice que si  $f(x, y) = f(x)g(y)$ , entonces

$$\int_A f(x) dx \int_B g(y) dy = \int_{A \times B} f(x)g(y) dx dy.$$

Tenemos que  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y su transformada de Fourier está definida como:

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(z) e^{-2\pi i(z \cdot \xi)} d^n z = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(z-x) e^{-2\pi i(z \cdot \xi)} d^n x d^n z.$$

Notemos que  $|f(x)g(z-x)e^{-2\pi i(z \cdot \xi)}| = |f(x)g(z-x)|$ , entonces por el argumento anterior, podemos utilizar el Teorema de Fubini:

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(z-x) e^{-2\pi i(z \cdot \xi)} d^n z \right) d^n x.$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variable:  $y = z-x$ ,  $dy = dz$ :

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i((y+x) \cdot \xi)} d^n y \right) d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i(y \cdot \xi)} d^n y = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

(7) Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) d^n x.$$

Demostración:

El término de la izquierda de la igualdad es igual a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n \xi d^n x,$$

debido a la definición de la transformada de Fourier y el Teorema de Fubini.

De la misma manera obtenemos que el término de la derecha es igual a:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x d^n \xi.$$

Y como estas dos integrales son iguales, ya hemos visto la igualdad que queríamos probar.

□

### 2.1.1. Cálculo de la transformada de Fourier de diversas funciones

En este apartado vamos a dar unos ejemplos para aplicar algunas de las propiedades de la proposición anterior.

#### Ejemplo 2.1.1

Sea  $n = 1$  y  $f(x) = \mathcal{X}_{(a,b)}(x)$  la función característica en el intervalo  $(a,b)$ . Entonces

$$\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{\pi\xi} e^{-\pi i(a+b)\xi} \sin(\pi\xi(a-b))$$

y si  $(a,b) = (-k,k)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\hat{\mathcal{X}}_{(-k,k)}(\xi) = \frac{\sin(2\pi k\xi)}{\pi\xi}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx = \int_a^b e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx = \int_a^b (\cos(2\pi x\xi) - i \sin(2\pi x\xi)) dx \\ &= \int_a^b \cos(2\pi x\xi) dx - i \int_a^b \sin(2\pi x\xi) dx = \frac{\sin(2\pi x\xi)}{2\pi\xi} \Big|_a^b - i \left( -\frac{\cos(2\pi x\xi)}{2\pi\xi} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2\pi\xi} [\sin(2\pi\xi b) - \sin(2\pi\xi a) + i \cos(2\pi\xi b) - i \cos(2\pi\xi a)] \\ &= \frac{1}{2\pi\xi} [i(\cos(2\pi\xi b) - i \sin(2\pi\xi b)) - i(\cos(2\pi\xi a) - i \sin(2\pi\xi a))] \\ &= \frac{1}{2\pi\xi} [ie^{-2\pi i\xi b} - ie^{-2\pi i\xi a}] = \frac{i}{2\pi\xi} [e^{-2\pi i\xi b} - e^{-2\pi i\xi a}] \\ &= -\frac{1}{2\pi i\xi} [e^{-2\pi i\xi b} - e^{-2\pi i\xi a}] = -\frac{1}{2\pi i\xi} e^{-2\pi i(a+b)\xi} [e^{2\pi ia\xi} - e^{2\pi ib\xi}]. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Utilizando las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$(1) \cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

$$(2) \sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

podemos expresar la última parte de la expresión (2.1.3) como:

$$\begin{aligned} e^{2\pi ia\xi} - e^{2\pi ib\xi} &= \cos(2\pi a\xi) + i \sin(2\pi a\xi) - \cos(2\pi b\xi) - i \sin(2\pi b\xi) \\ &= \cos(2\pi a\xi) - \cos(2\pi b\xi) + i[\sin(2\pi a\xi) - \sin(2\pi b\xi)] \\ &= -2 \sin\left(\frac{2\pi a\xi + 2\pi b\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi a\xi - 2\pi b\xi}{2}\right) \\ &\quad + 2i \cos\left(\frac{2\pi a\xi + 2\pi b\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi a\xi - 2\pi b\xi}{2}\right) \\ &= 2 \sin(\pi\xi(a-b)) [-\sin(\pi\xi(a+b)) + i \cos(\pi\xi(a+b))] \\ &= 2 \sin(\pi\xi(a-b)) i [\cos(\pi\xi(a+b)) + i \sin(\pi\xi(a+b))] \\ &= 2 \sin(\pi\xi(a-b)) i e^{i\pi\xi(a+b)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(2.1.3) = -\frac{1}{2\pi i\xi} e^{-2\pi i(a+b)\xi} 2i \sin(\pi\xi(a-b)) e^{i\pi\xi(a+b)} = -\frac{1}{\pi\xi} e^{-\pi i(a+b)\xi} \sin(\pi\xi(a-b)).$$

En particular, si  $(a, b) = (-k, k)$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$ , obtenemos lo siguiente:

$$\hat{\mathcal{X}}_{(-k,k)}(\xi) = \frac{\sin(2\pi k\xi)}{\pi\xi},$$

como queríamos ver.

### Observación 2.1.1

Aquí tenemos un ejemplo de una función que pertenece a  $L^1(\mathbb{R})$  pero su transformada de Fourier no.

$$\mathcal{X}_{(-k,k)}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}), \quad \hat{\mathcal{X}}_{(-k,k)}(\xi) \notin L^1(\mathbb{R}).$$

### Ejemplo 2.1.2

De nuevo tomamos  $n = 1$ . Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$ , definimos la siguiente función:

$$g_k(x) = \begin{cases} k+1+x & \text{si } x \in (-k-1, -k+1] \\ 2 & \text{si } x \in (-k+1, k-1) \\ k+1-x & \text{si } x \in [k-1, k+1) \\ 0 & \text{si } x \notin (-k-1, k+1) \end{cases},$$

o lo que es lo mismo:

$$g_k(x) = \mathcal{X}_{(-1,1)} * \mathcal{X}_{(-k,k)}(x).$$

$$\text{Entonces } \hat{g}_k(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi) \sin(2\pi k\xi)}{(\pi\xi)^2}.$$

### Solución:

Vamos a empezar viendo quién es  $g_k(x) = \mathcal{X}_{(-1,1)} * \mathcal{X}_{(-k,k)}(x)$ :

$$(\mathcal{X}_{(-1,1)} * \mathcal{X}_{(-k,k)})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_{(-1,1)}(x-y) \cdot \mathcal{X}_{(-k,k)}(y) dy = I.$$

Sabemos que

$$\mathcal{X}_{(-1,1)}(x-y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x-y \leq 1 \\ 0 & \text{si en otro caso} \end{cases},$$

donde

$$-1 \leq x-y \leq 1 \implies -1-x \leq -y \leq 1-x \implies 1+x \geq y \geq x-1,$$

y por tanto:

$$\mathcal{X}_{(-1,1)}(x-y) \cdot \mathcal{X}_{(-k,k)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in ((x-1, x+1) \cap (-k, k)) \\ 0 & \text{si en otro caso} \end{cases}.$$

Ahora vamos a ver los 4 casos que tenemos dependiendo de  $y$ :

Caso 1: Si  $x \in (-k-1, -k+1]$ .

Luego  $(x-1, x+1) \cap (-k, k) = (-k, x+1)$ , y por tanto

$$I = \int_{-k}^{x+1} 1 dy = k+1+x.$$

Caso 2: Si  $x \in (-k+1, k-1)$ .

Luego  $(x-1, x+1) \cap (-k, k) = (x-1, x+1)$ , y por tanto

$$I = \int_{x-1}^{x+1} 1dy = 2.$$

Caso 3: Si  $x \in [k-1, k+1)$ .

Luego  $(x-1, x+1) \cap (-k, k) = (x-1, k)$ , y por tanto

$$I = \int_{x-1}^k 1dy = k+1-x.$$

Caso 4: Si  $x \notin (-k-1, k+1)$ .

Luego  $(x-1, x+1) \cap (-k, k) = \emptyset$ , y por tanto  $I = 0$ .

Por la propiedad (6) de la Proposición (2.1.1) y el resultado del ejemplo anterior, llegamos a esta expresión para la transformada de Fourier de  $g_k$ :

$$\hat{g}_k(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi) \sin(2\pi k\xi)}{(\pi\xi)^2},$$

donde observamos que  $\hat{g}_k \in L^1(\mathbb{R})$ . Para ver que  $\hat{g}_k(\xi)$  es integrable, tenemos que ver que  $\int_{\mathbb{R}} \hat{g}_k(\xi) d\xi < \infty$ . Sabemos que:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{g}_k(\xi) d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}_k(\xi)| d\xi.$$

Luego tenemos:

$$\int_1^\infty \hat{g}_k(\xi) d\xi \leq \int_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^2} < \infty,$$

donde la integral anterior sabemos que es finita porque es una integral impropia de primera especie de la forma

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha},$$

con  $\alpha = 2$ , y esa integral es convergente para  $\alpha > 1$ , luego es finita. Como  $\hat{g}_k(\xi)$  es par,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{d\xi}{\xi^2} < \infty,$$

utilizando el mismo razonamiento anterior. Para ver que  $\int_{-1}^1 \hat{g}_k(\xi) d\xi$  es finito, vamos a utilizar que

$$\sin(a) \leq a, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 \frac{\sin(2\pi\xi) \sin(2\pi k\xi)}{(\pi\xi)^2} d\xi \right| &\leq \int_{-1}^1 \left| \frac{\sin(2\pi\xi) \sin(2\pi k\xi)}{(\pi\xi)^2} \right| d\xi \leq \int_{-1}^1 \frac{2\pi\xi 2\pi k\xi}{(\pi\xi)^2} d\xi \\ &= \int_{-1}^1 4k d\xi = 8k < \infty. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.1.3**

Ahora tomamos  $n \geq 1$ . Sea  $f(x) = e^{-4\pi^2 t |x|^2}$  con  $t > 0$ . Entonces la transformada de Fourier de  $f$  es:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Solución:

Sabemos lo siguiente:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t |x|^2} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x. \quad (2.1.4)$$

Vamos a comenzar con el siguiente cambio de variable:  $x = \frac{y}{\sqrt{t}}$ ,  $dx = \frac{dy}{\sqrt{t}}$ . Podemos restringirnos al caso  $t = 1$  por la propiedad (5) de la proposición (2.1.1). Por el Teorema de Fubini tenemos:

$$\begin{aligned} (2.1.4) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 |y|^2} e^{-2\pi i(y \cdot \xi)} d^n y = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 y_j^2} e^{-2\pi i(y_j \cdot \xi_j)} dy_j \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-4\pi^2 y_j^2 - 2\pi i(y_j \cdot \xi_j))} dy_j = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-4\pi^2 y_j^2 - 2\pi i(y_j \cdot \xi_j))} e^{\xi_j^2/4 - \xi_j^2/4} dy_j \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-4\pi^2 y_j^2 - 2\pi i(y_j \cdot \xi_j) + \xi_j^2/4)} e^{-\xi_j^2/4} dy_j = \prod_{j=1}^n e^{-\xi_j^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi y_j + i\xi_j/2)^2} dy_j \\ &= 2^{-n} \pi^{-n/2} e^{-|\xi|^2/4}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-2\pi y + iy/2)^2} dy \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-2\pi y)^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \frac{dz}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

para lo cual hemos realizado este cambio de variable:  $z = 2\pi y$ ,  $\frac{dz}{2\pi} = dy$ . Hemos utilizado que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ , que está demostrado en el anexo en la observación (5.2.1). El paso (1) lo tenemos demostrado también en el anexo, en la observación (5.2.3). Por lo tanto, hemos obtenido la expresión a la que queríamos llegar.

**Observación 2.1.2**

Si en el ejemplo anterior tomamos  $t = \frac{1}{4\pi}$ , tenemos:

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{e^{-\pi |x|^2}}(\xi) = e^{-\pi |\xi|^2},$$

y si tomamos  $t = \frac{1}{16\pi^2 y}$ , obtenemos:

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{-|x|^2/4y}}{(4\pi y)^{n/2}}\right)(\xi) = e^{-4\pi^2 y |\xi|^2}.$$

**Ejemplo 2.1.4**

*La función de densidad de la distribución normal*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

*tiene la transformada de Fourier:*

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi i \xi \mu} \cdot e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2},$$

*donde  $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$  con  $\sigma > 0$ .*

Solución:

Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x) = e^{-\pi x^2}$ . Por el ejemplo (2.1.7) sabemos que  $\widehat{h}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$ .  
Sea

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\pi(x/\sqrt{2\pi}\sigma)^2}.$$

Hay que destacar que hemos tomado  $g$  prácticamente igual a  $f$  salvo que  $\mu = 0$ . Luego, al igual que el ejercicio anterior,

$$\widehat{g}(\xi) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\pi(x/\sqrt{2\pi}\sigma)^2} \right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( e^{-\pi(x/\sqrt{2\pi}\sigma)^2} \right)(\xi) = \widehat{(\delta_a h)}(\xi),$$

donde denotamos a  $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ . Podemos observar como  $g$  es la función dilatada de  $h$  con factor  $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{(\delta_a h)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \sqrt{2\pi}\sigma \widehat{(e^{-\pi x^2})}(\sqrt{2\pi}\sigma \xi) = (e^{-\pi \xi^2})(\sqrt{2\pi}\sigma \xi) \\ &= e^{-\pi(\sqrt{2\pi}\sigma \xi)^2} = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2}. \end{aligned}$$

Entonces, como  $f$  era la función de densidad de la distribución normal, podemos observar que  $f$  es la traslación de paso  $\mu$  de  $g$  tal que  $f(x) = \tau_\mu g(x)$  donde  $\tau_\mu g(x) = g(x - \mu)$ . Y por la propiedad (4) de la Proposición (2.1.1) sabemos que su transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi i(\mu \cdot \xi)} \cdot \widehat{g}(\xi) = e^{-2\pi i(\mu \cdot \xi)} \cdot e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2}.$$

□

**Ejemplo 2.1.5**

*En este ejemplo vamos a ver una aplicación muy útil de la transformada de Fourier en teoría de la probabilidad. Vamos a buscar  $g = f_1 * f_2$  tal que*

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-(x-\mu_2)^2/2\sigma_2^2},$$

*donde  $\sigma_1, \mu_1, \sigma_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$  con  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ .*

Solución:

Utilizamos lo visto en el ejemplo anterior. Luego tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \widehat{f}_1(\xi) \cdot \widehat{f}_2(\xi) = e^{-2\pi i \xi \mu_1} e^{-2\pi^2 \sigma_1^2 \xi^2} \cdot e^{-2\pi i \xi \mu_2} e^{-2\pi^2 \sigma_2^2 \xi^2} \\ &= e^{-2\pi i \xi \mu} \cdot e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2},\end{aligned}$$

con  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  y  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ . Por tanto,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

En este ejemplo, hemos visto que el resultado de realizar la convolución de dos distribuciones normales nos da una nueva distribución normal de media la suma de las medias de cada distribución y de varianza las sumas de las varianzas de cada distribución.

### Ejemplo 2.1.6

Sean  $f_1 = f, f_2 = f * f, f_3 = f * f * f \dots$  donde  $f$  es la función de densidad de la distribución normal

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}},$$

con  $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ . Vamos a buscar una expresión para  $f_n(x)$ .

Solución:

Ya hemos visto que

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi i \xi \mu} \cdot e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2},$$

entonces

$$\widehat{f}_n(\xi) = \widehat{f}_1(\xi) * \dots * \widehat{f}_n(\xi) = \widehat{f}(\xi)^n = (e^{-2\pi i \xi \mu} \cdot e^{-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2})^n = e^{-2\pi i \xi n \mu} \cdot e^{-2\pi^2 n \sigma^2 \xi^2}.$$

Luego  $\widehat{f}_n$  es la transformada de Fourier de

$$f_n(x) = \frac{e^{-(x-n\mu)^2/2n\sigma^2}}{\sqrt{2\pi n\sigma}},$$

que es la expresión que buscábamos.

### 2.1.2. La transformada de Fourier y las derivadas

En esta subsección vamos a mostrar algunas propiedades sobre cómo actúan la derivada y la transformada de Fourier, que luego nos serán muy útiles a la hora de resolver las EDP's en el capítulo siguiente.

#### Proposición 2.1.2

Supongamos que  $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , donde  $x_k$  denota la coordenada  $k$ -ésima de  $x$ . Entonces  $\widehat{f}$  es diferenciable respecto de  $\xi_k$  y  $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = (-2\pi i x_k \widehat{f(x)})(\xi)$ .

Demostración:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)}) d^n x = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) (-2\pi i x_k)) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = (-2\pi i x_k \widehat{f(x)})(\xi),\end{aligned}$$

donde lo anterior se cumple como consecuencia de combinar el Teorema de Fubini y el Teorema Fundamental del Cálculo.

□

### Definición 2.1.2

Sean  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Se le llama a  $g$  derivada parcial de  $f$  respecto de la  $k$ -ésima variable en la norma  $L^p$  si se cumple lo siguiente:

$$\left\| \frac{f(x + h e_k) - f(x)}{h} - g(x) \right\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

donde  $e_k$  tiene la  $k$ -ésima coordenada igual a 1 y resto igual a 0. Por lo tanto,

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_k) - f(x)}{h}.$$

### Teorema 2.1.1

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y además con derivadas parciales, y sea  $g$  su derivada parcial respecto de la  $k$ -ésima variable en la norma  $L^1$ . Entonces se tiene:

$$\hat{g}(\xi) = 2\pi i \xi_k \hat{f}(\xi).$$

Demostración:

Por la definición anterior tenemos que:

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_k) - f(x)}{h}.$$

A partir de esta expresión vamos a calcular la transformada de Fourier de  $g$ :

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_k) - f(x)}{h} \right) d^n x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} \frac{f(x + h e_k) - f(x)}{h} d^n x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\hat{f}(\xi) e^{-2\pi i(-h e_k) \cdot \xi} - \hat{f}(\xi)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \hat{f}(\xi) \frac{e^{2\pi i h e_k \cdot \xi} - 1}{h} = 2\pi i \xi_k \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

□

### Ejemplo 2.1.7

En el ejemplo (2.1.3) ya hemos visto que es la transformada de Fourier de  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ .

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

En este ejemplo vamos a dar otra prueba.



Solución:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} dx.$$

Como  $e^{-\pi x^2}$  es par, podemos simplificar la transformada de Fourier escribiendo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi \xi x) dx.$$

Para calcular esta integral vamos a utilizar un argumento indirecto. Como tanto lo que estamos integrando en  $\hat{f}$ , como su derivada converge rápidamente a 0 cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , podemos escribir lo siguiente

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \frac{\partial}{\partial \xi}(\cos(2\pi \xi x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} (-2\pi x) \sin(2\pi \xi x) dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) + 2\pi \xi \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} (-2\pi x) \sin(2\pi \xi x) dx + 2\pi \xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi \xi x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} ((-2\pi x) \sin(2\pi \xi x) + 2\pi \xi \cos(2\pi \xi x)) dx = \\ &= [e^{-\pi x^2} \sin(2\pi \xi x)]_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Lo siguiente que vamos a ver es el valor de  $\frac{\partial}{\partial \xi}(e^{\pi \xi^2} \cdot \hat{f})$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(e^{\pi \xi^2} \cdot \hat{f}) = (2\pi \xi) e^{\pi \xi^2} \hat{f}(\xi) + e^{\pi \xi^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = e^{\pi \xi^2} [2\pi \xi \hat{f}(\xi) + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi)] = 0,$$

donde la última igualdad se da por lo visto en (2.1.5). Entonces

$$e^{\pi \xi^2} \hat{f}(\xi) = \hat{f}(0).$$

Para calcular  $\hat{f}(0)$ , vamos a utilizar el mismo argumento que en el Ejemplo (2.1.3).

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i(x \cdot 0)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Ver en observación (5.2.2) del anexo. Por tanto,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{e^{\pi \xi^2}} = e^{-\pi \xi^2}.$$

Este ejemplo que acabamos de resolver nos será muy útil para el cálculo de integrales utilizando la transformada de Fourier, como vemos en el ejemplo (5.2.1) del anexo.

### 2.1.3. La transformada de Fourier inversa

Ahora vamos a ver si dada una transformada de Fourier  $\hat{f}$  de una función en  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , podemos obtener  $f$ . Los ejemplos vistos hasta ahora nos sugieren el uso de la siguiente fórmula:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d^n \xi.$$

Pero  $\widehat{f}(\xi)$  puede ser no integrable como en el Ejemplo (2.1.1) y esta fórmula no nos valdría entonces. Combinando las identidades de las propiedades (4) y (7) de la Proposición (2.1.1) y por la expresión vista en el Ejemplo (2.1.3), se obtiene :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-|\cdot|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} * f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} f(y) d^n y = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \left( \frac{e^{-|y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} \right) f(y) d^n y \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \widehat{e^{-4\pi^2 t |x|^2}})(y) f(y) d^n y = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d^n \xi, \end{aligned}$$

donde el límite está tomado en la norma de  $L^1$ . Si  $f$  y  $\widehat{f}$  son ambas integrables, el Teorema de la Convergencia Dominada nos garantiza la igualdad punto a punto. Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  es continua en  $x_0$ , tenemos:

$$f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-|\cdot|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} * f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x_0 \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d^n \xi.$$

Con todo lo anterior, vamos a formular el siguiente resultado:

### Proposición 2.1.3

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , se tiene:

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d^n \xi,$$

donde el límite está tomado en la norma de  $L^1$ . Además, si  $f$  es continua en  $x_0$ , entonces

$$f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x_0 \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d^n \xi,$$

como hemos mostrado anteriormente.

#### Demostración:

Trivial a partir de todo lo anterior a la formulación de la proposición.

□

### Observación 2.1.3

Si  $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \widehat{f}(\xi) d^n \xi,$$

en casi todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Nota 2.1.1

La transformada de Fourier inversa puede denotarse también de la siguiente manera

$$(f(x))^\sim = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \widehat{f}(\xi) d^n \xi.$$

## 2.2. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Para definir la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , debemos saber que  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  es un conjunto denso de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  y de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . La demostración podemos encontrarla en la Proposición (2.2.1).

### Teorema 2.2.1 *Teorema de Plancherel*

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2. \quad (2.2.1)$$

#### Demostración:

Sea  $g(x) = \bar{f}(-x)$ , siendo  $\bar{\phantom{x}}$  el conjugado complejo. Se tiene que  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y sabemos también que

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Como  $g(x) = \bar{f}(-x)$ , entonces  $\hat{g} = \overline{\widehat{f}}$ . Luego  $\widehat{(f * g)} = |\hat{f}|^2 \geq 0$  y en consecuencia,

$$\widehat{(f * g)} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Por la Proposición (2.1.3) y como  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , sabemos que

$$(f * g)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{(f * g)}(\xi) d^n \xi.$$

Entonces

$$(f * g)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{(f * g)}(\xi) d^n \xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(f * g)}(\xi) d^n \xi$$

y

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(f * g)}(\xi) d^n \xi = (f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(0-x) d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{f}(x) d^n x = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

□

El resultado anterior muestra que la transformada de Fourier define un operador lineal acotado desde  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

A partir del Teorema (2.2.1), podemos definir la transformada de Fourier de una función  $f$  que pertenezca a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

### Proposición 2.2.1 *Definición de $\hat{f}$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Se define la sucesión  $\{h_j\}$  en  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  de la siguiente manera:

$$h_j(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq j \\ 0 & \text{si } |x| > j \end{cases}.$$

Entonces  $h_j \rightarrow f$  y se define  $\hat{f}(\xi)$  tal que  $\hat{h}_j(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi)$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Demostración:

Veamos primero que  $h_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Por la definición (5.1.3) del anexo, sabemos que

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f = g \text{ en c.t.p y } \|g\|_2 < \infty\}.$$

También sabemos por hipótesis que  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Además tenemos que  $h_j = f$  en casi todo punto con  $|x| < j$ , porque podemos tomar un  $j$  lo suficientemente grande para que  $|x| \leq j$ . Para ver que  $h_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , nos faltaría comprobar que  $\|h_j\|_2 < \infty$ . Pero como  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , eso se cumple. Obviamente también  $h_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Ahora vamos a probar que  $h_j \longrightarrow f$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Tenemos que ver que  $\|h_j(x) - f(x)\|_2 \longrightarrow_{j \rightarrow \infty} 0$ .

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|h_j(x) - f(x)\|_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |h_j(x) - f(x)|^2 d^n x \right)^{1/2} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x)|^2 d^n x \right)^{1/2} = 0.$$

Por último, veamos que  $\hat{h}_j(\xi) \longrightarrow \hat{f}(\xi)$ . Sabemos que  $\hat{h}_j(\xi)$  es igual a:

$$\hat{h}_j(\xi) = \int_{|x| \leq j} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} h_j(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x.$$

Se verifica que  $\hat{h}_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y además  $\hat{h}_j$  es una sucesión de Cauchy en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ :

$$\|\hat{h}_j - \hat{h}_m\|_2 = \|\widehat{h_j - h_m}\|_2 = \|h_j - h_m\|_2.$$

Por tanto, es convergente.

Definimos  $\hat{f}(\xi)$  como el límite en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de la sucesión  $h_j$ :

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{h}_j(\xi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_j(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|x| < j} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x,$$

Hemos obtenido:

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|x| < j} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n),$$

como definición de  $\hat{f}$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

□

**Proposición 2.2.2**

Sean  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Entonces se tienen las siguientes tres propiedades:

(1) Se da lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \bar{\hat{g}}(x) d^n x.$$

En particular, si  $f = g$ , se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{f}(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \bar{\hat{f}}(x) d^n x \Leftrightarrow \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Demostración:

Sabemos que  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$ , entonces

$$\|f + \alpha g\|_2^2 = \|\hat{f} + \alpha \hat{g}\|_2^2. \quad (2.2.2)$$

Sabemos que

$$\|f + \alpha g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f + \alpha g|^2 d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 + |\alpha g|^2 + \bar{f}(\alpha g) + f(\bar{\alpha} \bar{g}) d^n x$$

y

$$\|\hat{f} + \widehat{\alpha g}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f} + \widehat{\alpha g}|^2 d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 + |\widehat{\alpha g}|^2 + \widehat{\bar{f}}(\widehat{\alpha g}) + \hat{f}(\bar{\alpha} \widehat{\bar{g}}) d^n x.$$

Luego expandiendo la ecuación (2.2.2), tenemos lo siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 + |\alpha g|^2 + \bar{f}(\alpha g) + f(\bar{\alpha} \bar{g}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 + |\widehat{\alpha g}|^2 + \widehat{\bar{f}}(\widehat{\alpha g}) + \hat{f}(\bar{\alpha} \widehat{\bar{g}}) d^n y.$$

Por el Teorema de Plancherel, hemos visto que  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ . Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 d^n y, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\alpha g|^2 d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\alpha g}|^2 d^n y.$$

Por lo tanto, nos queda

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(\alpha g) + f(\bar{\alpha} \bar{g}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\bar{f}}(\widehat{\alpha g}) + \hat{f}(\bar{\alpha} \widehat{\bar{g}}) d^n y,$$

y simplificando las expresiones, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \bar{f}(g) + \bar{\alpha} f(\bar{g}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \widehat{\bar{f}}(\widehat{g}) + \bar{\alpha} \hat{f}(\widehat{\bar{g}}) d^n y.$$

Si tomamos  $\alpha = 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \widehat{\bar{g}} d^n y$$

como queríamos demostrar.

□

- (2) La transformada de Fourier de la convolución de  $f$  y  $g$  es el producto de las transformadas de  $f$  y  $g$ :

$$\widehat{(f * g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z) d^n z d^n x \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(z \cdot \xi)} f(z) d^n z \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x - z) \cdot \xi} g(x - z) d^n x \right) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

(3) Para cada multi-índice  $\alpha$ , siendo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ , se tiene que

$$\widehat{D^\alpha f} = (-2\pi i \xi)^\alpha \hat{f},$$

tal que  $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y está definido en la definición (5.3.1).

Demostración:

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , que pertenece a un soporte compacto. El soporte de  $f$  es la adherencia de los puntos en los que  $f$  no se anula:

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

El soporte se dice compacto si es un conjunto cerrado y acotado. Entonces, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha(f(x)e^{-2\pi i(x \cdot \xi)}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} ((-2\pi i \xi)^\alpha f(x)) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x \\ &= (-2\pi i \xi)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = (-2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

### Teorema 2.2.2

La transformada de Fourier define un operador lineal en  $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

tal que verifica

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

Además,  $\mathcal{F}$  es una isometría:  $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ .

Demostración:

A partir del Teorema de Plancherel, (2.2.1), sabemos que si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . En particular, la imagen de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  a través de  $\mathcal{F}$ , es un subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Vamos a demostrar, que de hecho  $\mathcal{F}(L^2) = L^2$ . Asumimos que es un subespacio propio de  $L^2$ . Supongamos que existe  $g \neq 0$  con  $\|g\|_2 \neq 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)d^n x = 0,$$

para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , es decir, existe  $g$  ortogonal a  $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ . Por la Propiedad (7) de la Proposición (2.1.1), que se extiende para  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)d^n x = 0,$$

para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , en particular, podemos tomar  $f = \hat{g}$ . Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)^2 d^n x = 0.$$

Luego  $\hat{g}(\xi) = 0$  en casi todo punto, lo que contradice que

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 \neq 0.$$

Por lo tanto, hemos verificado que existe un operador lineal.

□

**Teorema 2.2.3**

La inversa de la transformada de Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  se puede definir por la fórmula

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2.3)$$

para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Demostración:

Definimos  $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  de la siguiente manera, según el enunciado: Si  $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$(\mathcal{F}^{-1}h)(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|\xi| < j} h(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d\xi \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Ahora demostramos que  $\mathcal{F}^{-1}$  definida anteriormente corresponde con la transformada de Fourier inversa cuando  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Supongamos que  $\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \tilde{f}$ , que según la definición de  $\mathcal{F}^{-1}$  en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  es el límite en la norma de  $L^2$  de la sucesión  $\{h_j\}$  siendo

$$h_j(x) = \int_{|\xi| < j} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d^n \xi.$$

Vamos a considerar el caso de que  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Entonces

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d^n \xi = \lim_{j \rightarrow \infty} h_j(x) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n)$$

y

$$\begin{aligned} (g, \tilde{f}) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d^n \xi \right) d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x \right) \overline{\hat{f}(\xi)} d^n \xi = (\hat{g}, \hat{f}), \end{aligned}$$

para cualquier  $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Pero el Teorema de Plancherel nos dice que  $(\hat{g}, \hat{f}) = (g, f)$ . Por tanto,  $f = \tilde{f}$ . Y entonces se cumple que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d^n \xi$$

□





## Capítulo 3

# Aplicaciones para el estudio de las EDPs

En este capítulo vamos a estudiar una serie de ecuaciones diferenciales famosas y para su resolución vamos a utilizar la transformada de Fourier apoyándonos en los resultados teóricos que hemos visto en el capítulo anterior.

### 3.1. Ecuación Lineal de Schrödinger

La Ecuación de Schrödinger es una ecuación lineal en derivadas parciales que describe la función de onda o la función de un sistema de mecánica cuántica. Esta ecuación fue un resultado clave en la historia de la mecánica cuántica, y su descubrimiento fue un hito importante en el desarrollo de este tema. En mecánica clásica, la segunda ley de Newton ( $F = m \cdot a$ ) se usa para hacer una predicción matemática sobre qué camino tomará un sistema físico dado con el paso del tiempo, dadas unas condiciones iniciales. Sin embargo, resolver esta ecuación nos da la posición y el impulso del sistema físico en función de la fuerza externa en el sistema. Esta ecuación es suficiente para describir su estado en cada instante del tiempo. Por ello, en mecánica cuántica, el análogo de la ley de Newton es la ecuación de Schrödinger.

El físico austriaco Erwin Schrödinger desarrolló la ecuación en 1925 y la publicó en 1926, en lo que sería la base para su trabajo por el que le fue otorgado el Premio Nobel de Física en 1933 junto con Paul Dirac. (9)

Consideremos el siguiente problema de Cauchy para la Ecuación Lineal de Schrödinger:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = i\Delta u(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (3.1.1)$$

donde  $\Delta$  es el laplaciano que tenemos definido en el anexo en la definición (5.3.2). Usando la transformada de Fourier en la variable  $x$  en el sistema (3.1.1) se obtiene:

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(t, \xi) = \partial_t \widehat{u}(t, \xi) = i\widehat{\Delta u}(t, \xi) = -4\pi^2 i|\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) \\ \widehat{u}(x, 0) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases}.$$

Veamos como hemos llegado hasta este sistema. Tenemos que

$$\widehat{\partial_t u(t, \cdot)}(\xi) = \partial_t \widehat{u}(t, \xi),$$

donde lo anterior se cumple como consecuencia de combinar el Teorema de Fubini y el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\widehat{\partial_t u(t, \cdot)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t, \cdot) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u(t, \cdot) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \partial_t \widehat{u}(t, \xi).$$

También tenemos, por (3.1.1), que:

$$\widehat{\partial_t u(t, \cdot)}(\xi) = i \widehat{\Delta u}(t, \xi) = i(2\pi i)^2 |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = -4\pi^2 i |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi).$$

Luego lo que nos queda es:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t, \xi) = -4\pi^2 i |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) \\ \widehat{u}(t, 0) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases},$$

que es una EDO en la variable  $t$  para  $\xi$  fijo. La incógnita es  $\widehat{u}(t, \xi)$ , que la vamos a denotar como  $g(t)$  para  $\xi$  fijo. Luego tenemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} g'(t) = -4\pi^2 i |\xi|^2 g(t) \\ g(0) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases}.$$

Ahora tenemos una EDO de variables separadas, luego al resolver obtenemos:

$$g(t) = e^{-4\pi^2 i |\xi|^2 t} g(0).$$

Cambiamos  $g(t)$  por  $\widehat{u}(t, \xi)$  y  $g(0)$  por  $\widehat{u}_0(\xi)$  para obtener la siguiente expresión:

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi).$$

Para llegar a la solución tenemos que obtener  $u(t, x)$ . Esto podríamos hacerlo con la fórmula de la inversa. Pero observamos que:

$$e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \cdot \widehat{u}_0(\xi) = \left( \frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{4ti}}}{(4\pi i t)^{n/2}} \right) \cdot \widehat{u}_0(\xi),$$

dado que:

$$e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} = \mathcal{F}\left( \frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \right).$$

Esta última igualdad que hemos presentado se da como consecuencia del Ejemplo (2.1.3) donde hemos calculado la transformada de Fourier para la función

$$f(x) = e^{-4\pi^2 t |x|^2} \implies \widehat{f}(\xi) = \frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

y con un cambio de variable podemos obtener el resultado deseado.

Finalmente, como  $\hat{u}(t, x) = e^{-4\pi^2 i t |x|^2} \hat{u}_0(x)$ , por la propiedad (6) de la Proposición (2.1.1), se obtiene:

$$u(t, x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{n/2}} * u_0(x) = \frac{e^{-\frac{i|x|^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{n/2}} * u_0(x), \quad (3.1.2)$$

siendo

$$\Phi(t, x) = \frac{e^{-\frac{i|x|^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{n/2}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

la solución fundamental de la Ecuación de Schrödinger. La solución fundamental de una EDP es la solución de la ecuación cuando se considera como dato inicial la función Delta de Dirac. La solución fundamental de la ecuación de Schrödinger sirve para describir el resto de soluciones de esta ecuación (en  $L^2$ ) mediante un producto de convolución, como en la fórmula (3.1.2).

Por lo visto en la definición (5.4.1) del anexo, si  $u_0(x) = \delta(x)$ , entonces fórmula (3.1.2) nos implica que  $u(t, x) = \Phi(t, x)$ .

## 3.2. Ecuación del Calor

La Ecuación del Calor es una ecuación en derivadas parciales que describe cómo la distribución de una cantidad (como el calor) evoluciona con el tiempo en un medio sólido, ya que espontáneamente fluye desde lugares donde es más alto hacia lugares donde es más bajo. Esta ecuación fue desarrollada y resuelta por primera vez por Joseph Fourier en 1822 para describir el flujo del calor. Es de una gran importancia en diferentes campos científicos:

1. Teoría de la Probabilidad: la Ecuación del Calor está relacionada con el estudio de caminos aleatorios y con el movimiento Browniano a través de la Ecuación de Fokker-Planck.
2. Matemáticas Financieras: esta ecuación es usada para resolver la Ecuación de Black-Scholes.
3. Mecánica Cuántica: para encontrar la propagación de la función de onda en la región libre de potencial.

(Ver (10)).

Para una función  $u(x, y, z)$  de tres variables espaciales  $(x, y, z)$  y tiempo  $t$ , la Ecuación del Calor es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u,$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente real llamado difusividad del medio. El valor de  $\alpha$  afecta a la velocidad y la escala espacial del proceso. Cambiarlo tiene el mismo efecto que cambiar la unidad de medida del tiempo (que afecta al valor de  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ) y/o la unidad de medida de longitud (que afecta al valor de  $\Delta u$ ). Por lo tanto, en los estudios matemáticos de la Ecuación del Calor, se establece  $\alpha = 1$ . Con esta simplificación, la ecuación del calor es el prototipo de las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas.

Consideremos el siguiente problema de Cauchy para la Ecuación del Calor:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (3.2.1)$$

Usando la transformada de Fourier en la variable  $x$  en el sistema (3.2.1) se obtiene:

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(t, \xi) = \partial_t \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\Delta u}(t, \xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) \\ \widehat{u}(t, 0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}.$$

Como en el caso anterior, hemos llegado a este sistema mediante el mismo procedimiento. Tenemos que

$$\widehat{\partial_t u(t, \cdot)}(\xi) = \partial_t \widehat{u}(t, \xi)$$

donde lo anterior se cumple de nuevo como consecuencia de combinar el Teorema de Fubini y el Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\widehat{\partial_t u(t, \cdot)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(t, \cdot) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u(t, \cdot) e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} d^n x = \partial_t \widehat{u}(t, \xi).$$

También tenemos, por (3.2.1), que:

$$\widehat{\partial_t u}(t, \cdot)(\xi) = \widehat{\Delta u}(t, \xi) = (2\pi i)^2 |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi).$$

Luego lo que nos queda es:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t, \xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) \\ \widehat{u}(t, 0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases},$$

que es una EDO en la variable  $t$  para  $\xi$  fijo. La incógnita es  $\widehat{u}(t, \xi)$ , que la vamos a denotar como  $g(t)$  para  $\xi$  fijo. Luego tenemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} g'(t) = -4\pi^2 |\xi|^2 g(t) \\ g(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}.$$

Tenemos una EDO de variables separadas, luego al resolver obtenemos:

$$g(t) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} g(0).$$

Cambiamos  $g(t)$  por  $\widehat{u}(t, \xi)$  y  $g(0)$  por  $\widehat{f}(\xi)$  para obtener la siguiente expresión:

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \widehat{f}(\xi).$$

Para llegar a la solución tenemos que obtener  $u(t, x)$ . Esto podríamos hacerlo con la fórmula de la inversa. Pero observamos que:

$$e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \cdot \widehat{f}(\xi) = \left( \frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \right) \cdot \widehat{f}(\xi),$$

porque

$$e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} = \mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}\right).$$

Como en la Ecuación de Schrödinger, esta última igualdad se da como consecuencia del Ejemplo (2.1.3), aunque ahora no hay que hacer ningún cambio de variable para obtener el resultado, puesto que en ese ejemplo calculábamos exactamente la transformada de Fourier de la función que ahora nos ocupa.

Finalmente, como  $\hat{u}(t, x) = e^{-4\pi^2 t |x|^2} \hat{f}(\xi)$ , por la propiedad (6) de la Proposición (2.1.1), se obtiene:

$$u(t, x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} * f(x), \quad (3.2.2)$$

siendo

$$\Phi(t, x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}},$$

la solución fundamental de la Ecuación del Calor. Es solución fundamental de la ecuación del calor porque es una solución obtenida con el dato inicial  $f = \delta$ , siendo  $\delta$  la función Delta de Dirac. Como en el caso anterior, la solución fundamental sirve además para describir el resto de soluciones de la ecuación del calor (en  $L^2$ ), según la fórmula (3.2.2).

$u(t, x)$  es la densidad del calor. La integral  $\int u(t, x) dx$  siempre da lo mismo, pues el calor se conserva.

A continuación veremos tres gráficas de la solución fundamental de esta ecuación y como se comporta para tres tiempos distintos:

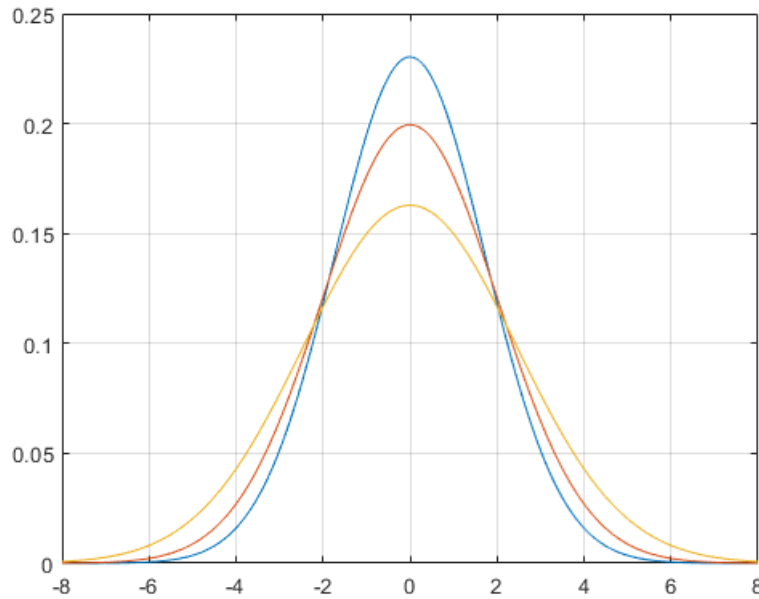


Figura 3.1: Gráficas de la solución fundamental de la ecuación del calor para distintos valores de  $t$ .

Podemos apreciar como varían las gráficas según el tiempo  $t$  dado. La gráfica azul es para  $t = 1,5$ , la roja para  $t = 2$  y la verde para  $t = 3$ . Por tanto, intuimos que cerca del eje de simetría (el origen), la gráfica toma valores mayores si  $t$  es menor y toma valores menores si  $t$  es mayor. Lejos del origen, las gráficas cambian, dependiendo del valor de  $t$ , tomando valores mayores si  $t$  es mayor, y valores menores si  $t$  es menor. Esto último se puede apreciar en el momento en que las gráficas se cortan. Cuando las gráficas están lejos del origen, parece que valen cero, pero esto no puede ser porque son exponenciales, estarán en valores próximos a cero pero sin ser serlo. Ésto ocurre debido a la explicación que a continuación contamos de dicho fenómeno.

Una explicación intuitiva de este fenómeno es la propagación del calor. Si tenemos una fuente de calor en el centro de una sala (en  $x = 0$ ) a la que no se le proporciona más calor, entonces según pasa el tiempo, el calor se va distribuyendo alrededor de manera uniforme, de tal manera que la temperatura cerca de la fuente de calor empieza a bajar según pasa el tiempo y la temperatura lejos de la fuente de calor va subiendo poco a poco.

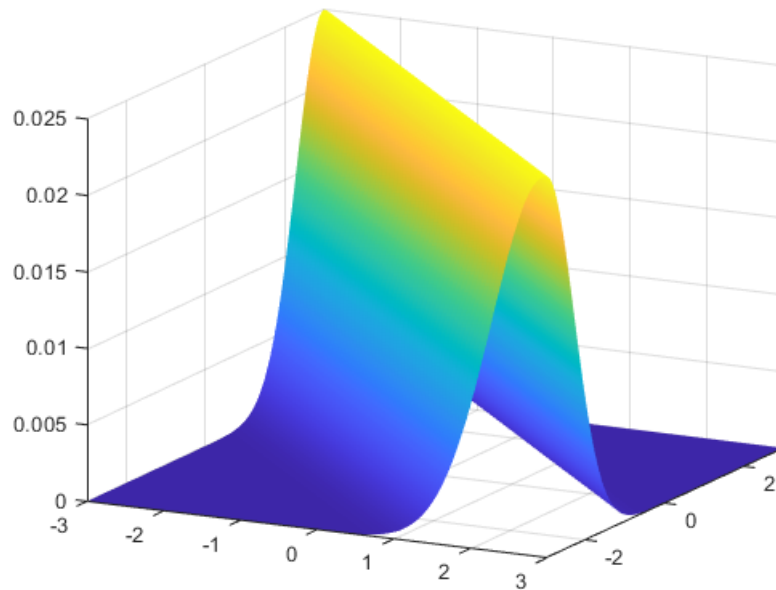


Figura 3.2: Gráfica de la solución fundamental de la ecuación del calor para  $t = 2$  en  $\mathbb{R}^2$ .

En este caso hemos representado la gráfica sólo para un valor de  $t$ . Hemos elegido  $t = 2$ . Es el valor de  $t$  intermedio que habíamos usado antes. En esta gráfica observamos cómo se propaga el calor procedente de una fuente de calor por una sala a medida que pasa el tiempo sin que se le siga suministrando calor.

### 3.3. Ecuación de Korteweg-de Vries

En matemáticas, la Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) es un modelo matemático de ondas en superficies de aguas poco profundas. Es particularmente notable como prototipo de un modelo exactamente solucionable, es decir, una ecuación no lineal en derivadas parciales cuyas soluciones pueden especificarse de manera exacta y precisa.

Fue presentada por primera vez por Boussinesq en 1877 y redescubierta por Diederik Korteweg y Gustav de Vries en 1895.

La Ecuación KdV es una ecuación en derivadas parciales no lineal de una función  $\mathcal{V}$  de dos variables reales: el espacio  $x$  y el tiempo  $t$ . Tiene la siguiente forma:

$$\partial_t \mathcal{V} + \partial_x^3 \mathcal{V} - 6\mathcal{V} \partial_x \mathcal{V} = 0,$$

donde la constante 6 delante del último término es convencional pero no tiene gran importancia.

Se pueden multiplicar  $t$ ,  $x$  o  $\mathcal{V}$  por constantes para que los coeficientes de cualquiera de los tres términos sean iguales a cualquier constante distinta de cero.

(11)

Nosotros vamos a estudiar el caso lineal. Por lo tanto, tenemos el siguiente Problema de Cauchy para la Ecuación KdV:

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{V}(t, x) + \partial_x^3 \mathcal{V}(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \mathcal{V}(x, 0) = \mathcal{V}_0(x) \end{cases}. \quad (3.3.1)$$

Usando la transformada de Fourier en la variable  $x$  en el sistema (3.3.1) se obtiene:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{\mathcal{V}}(t, \xi) - 8\pi^3 i |\xi|^3 \widehat{\mathcal{V}}(t, \xi) = 0 \\ \widehat{\mathcal{V}}(x, 0) = \widehat{\mathcal{V}}_0(x) \end{cases},$$

puesto que

$$\partial_x^3 \mathcal{V} = (2\pi i)^3 |\xi|^3 \widehat{\mathcal{V}} = -8\pi^3 i |\xi|^3 \widehat{\mathcal{V}}.$$

Por tanto tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{\mathcal{V}}(t, \xi) = 8\pi^3 i |\xi|^3 \widehat{\mathcal{V}}(t, \xi) \\ \widehat{\mathcal{V}}(t, 0) = \widehat{\mathcal{V}}_0(\xi) \end{cases},$$

que es una EDO en la variable  $t$  para  $\xi$  fijo. La incógnita es  $\widehat{\mathcal{V}}(t, \xi)$ , que la vamos a denotar como  $g(t)$  para  $\xi$  fijo. Luego tenemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} g'(t) = 8\pi^3 i |\xi|^3 g(t), & t \in (0, \infty) \\ g(0) = \widehat{\mathcal{V}}_0(\xi) \end{cases}.$$

Tenemos una EDO de variables separadas, luego al resolver obtenemos:

$$g(t) = e^{8\pi^3 i |\xi|^3 t} g(0).$$

Cambiamos  $g(t)$  por  $\widehat{\mathcal{V}}(t, \xi)$  y  $g(0)$  por  $\widehat{\mathcal{V}}_0(\xi)$  para obtener la siguiente expresión:

$$\widehat{\mathcal{V}}(t, \xi) = e^{8\pi^3 i |\xi|^3 t} \widehat{\mathcal{V}}_0(\xi).$$

Para llegar a la solución tenemos que obtener  $\mathcal{V}(t, x)$ . Para poder utilizar, a partir de este punto, el mismo procedimiento que en los dos anteriores casos, tendríamos que conocer que función tiene como transformada  $e^{8\pi^3 it|\xi|^3}$ . La denotamos por  $S_t(x)$ . Entonces tendríamos que

$$e^{8\pi^3 it|\xi|^3} \cdot \widehat{\mathcal{V}_0}(\xi) = \widehat{S_t(x)} \cdot \widehat{\mathcal{V}_0}(\xi).$$

Como  $\widehat{\mathcal{V}}(t, \xi) = e^{8\pi^3 i|\xi|^3 t} \widehat{\mathcal{V}_0}(\xi)$ , por la propiedad (6) de la Proposición (2.1.1), se obtiene:

$$\mathcal{V}(t, \xi) = S_t(x) * \mathcal{V}_0(\xi).$$

Nos falta ver quién es  $S_t(x)$ .  $S_t(x)$  es definida así:

$$S_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} e^{8\pi^3 it|\xi|^3} d\xi.$$

Haciendo el siguiente cambio de variable  $\xi = \frac{z}{2\pi t^{1/3}}$ ,  $d\xi = \frac{dz}{2\pi t^{1/3}}$  nos queda:

$$\begin{aligned} S_t(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \frac{z}{2\pi t^{1/3}}} e^{8\pi^3 it \left| \frac{z}{2\pi t^{1/3}} \right|^3} \frac{dz}{2\pi t^{1/3}} \\ &= \frac{1}{2\pi t^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i x z / t^{1/3}} e^{i z^3} dz = \frac{1}{2\pi t^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i x / t^{1/3}) \cdot z} e^{i z^3} dz. \end{aligned}$$

Luego obtenemos que

$$S_t(x) = \frac{1}{t^{1/3}} Ai\left(\frac{x}{t^{1/3}}\right),$$

donde  $Ai$  es la función aireada (Airy function en inglés):

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i x z} e^{i z^3} dz.$$

Como hemos dicho, sabemos que  $Ai$  es la función aireada. Buscamos una fórmula equivalente para  $Ai(x)$ :

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \xi^3/3)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\xi x + \xi^3/3) + i \sin(\xi x + \xi^3/3)] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi x + \xi^3/3) d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi x + \xi^3/3) d\xi \right] \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi x + \xi^3/3) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi x + \xi^3/3) d\xi. \end{aligned}$$

(1) se cumple porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi x + \xi^3/3) d\xi = 0,$$

por ser la función que integramos impar y en un dominio de integración simétrico. Tenemos que ver que  $Ai(x)$  es finita.

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\xi x + \xi^3/3) d\xi = \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \cos(\xi x + \xi^3/3) d\xi,$$



la cual es convergente (finita) porque las partes negativas y positivas de las oscilaciones rápidas tienden a cancelarse como vemos en la siguiente figura:

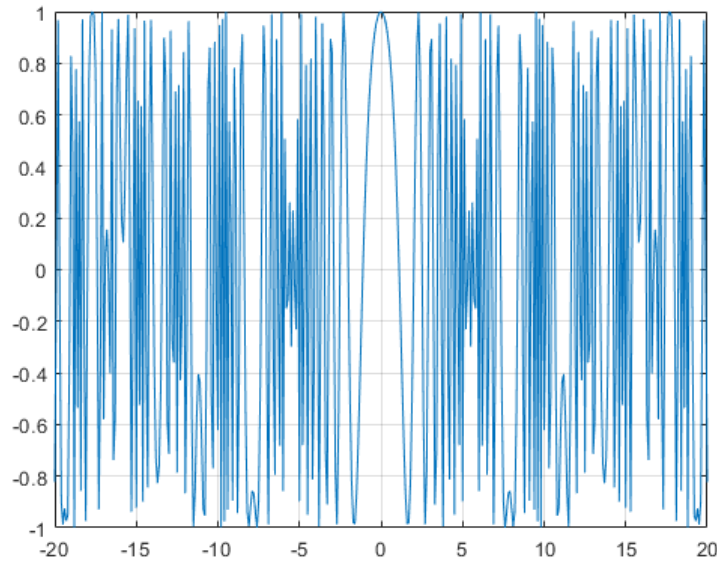


Figura 3.3: Gráfica de  $\cos(\xi x + \xi^3/3)$  para  $x = 1$ .

$Ai$  no se puede resolver.  $Ai(x)$  se define mediante una integral impropia convergente y no sabemos calcular una fórmula explícita (primitiva de  $Ai(x)$ ). Pero siendo una función muy conocida, *Matlab* la tiene integrada en su base de datos y mostramos la siguiente gráfica usando el comando *airy*:

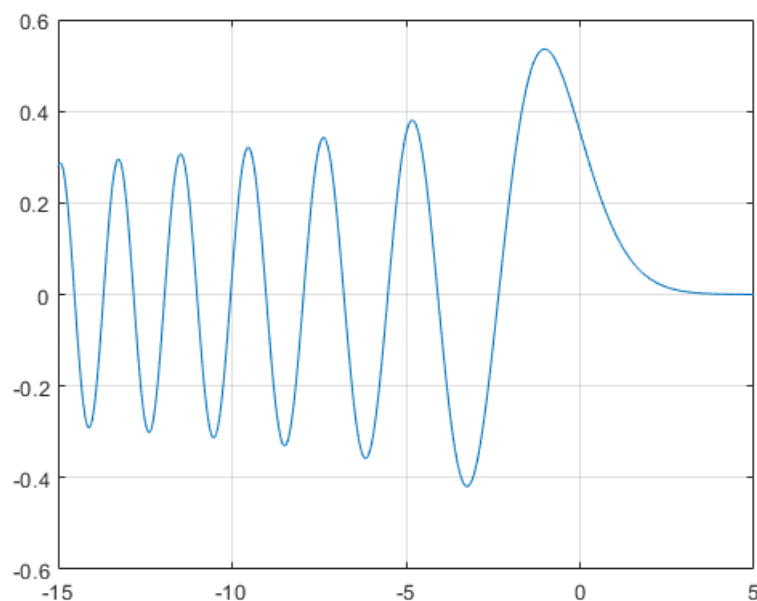


Figura 3.4: Gráfica de  $Ai(x)$ .

En esta figura observamos cómo la función Airy para valores negativos de  $x$ , oscila alrededor del cero con una frecuencia cada vez menor y una amplitud cada vez mayor. Pero cuando la

función toma valores positivos de  $x$ , decrece rápidamente a cero.

### 3.4. Ecuación de Ondas

La ecuación de ondas es una ecuación en derivadas parciales lineal que describe el movimiento de las ondas (ondas de luz, ondas sonoras y ondas en el agua). Esta ecuación muestra que la amplitud de dos ondas que interactúan es la suma de ellas. Esto nos implica que podemos analizar el comportamiento de una onda al dividir la onda en sus componentes como haremos posteriormente a lo largo del estudio de esta ecuación. Es importante en diversos campos como la acústica, el electromagnetismo y la dinámica de fluidos.

La ecuación de ondas es

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

que la estudiaremos en un problema de condiciones iniciales. Se tiene que  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . La incógnita será  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Delta u$  es el laplaciano de  $u$ .

La ecuación de ondas es un modelo para una cuerda vibrante (en  $n = 1$ ), una membrana (en  $n = 2$ ) o un sólido elástico (en  $n = 3$ ). En todas estas interpretaciones  $u(t, x)$  representa el desplazamiento en alguna dirección del punto  $x$  para un tiempo  $t \geq 0$ . La interpretación física de la ecuación de ondas nos sugiere que matemáticamente haya dos condiciones iniciales, una para el desplazamiento  $u$  y otra para la velocidad  $u_t$ , ambas en el tiempo  $t = 0$ .

Consideramos entonces el siguiente problema de condiciones iniciales para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (3.4.1)$$

Usando la transformada de Fourier en la variable  $x$  en el sistema (3.4.1) obtenemos lo siguiente

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases}, \quad (3.4.2)$$

debido a que:

- $\widehat{\partial_t^2 u}(t, \xi) = \partial_t^2 \hat{u}(t, \xi).$
- $\widehat{\Delta u}(t, \xi) = (2\pi i)^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi).$
- $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi).$
- $\widehat{\partial_t u}(\xi, 0) = \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi).$

donde los dos primeros y el último punto son ciertos utilizando lo mismo que en las ecuaciones anteriores donde lo hemos explicado con detalle. Por lo tanto, obtenemos que (3.4.2) es una EDO para la variable  $t$  en un  $\xi$  fijo. Cambiamos  $\hat{u}(t, \xi)$  por  $g(t)$  y entonces, tenemos el siguiente problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} g''(t) + 4\pi^2 |\xi|^2 g(t) = 0 \\ g(0) = g_0, \quad g'(0) = g_1 \end{cases},$$

que tiene una EDO de segundo orden con coeficientes constantes.

Esta ecuación la podemos resolver fácilmente probando  $g(t) = e^{rt}$ , entonces  $g''(t) = r^2 e^{rt}$ . Y si la sustituimos en nuestra ecuación obtenemos:

$$e^{rt}(r^2 + 4\pi^2|\xi|^2) = 0 \implies r = \pm i2\pi|\xi|.$$

Y por lo tanto, tenemos que la solución de esa EDO es

$$g(t) = c_1 e^{-i2\pi|\xi|t} + c_2 e^{i2\pi|\xi|t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Otra forma de escribir  $g(t)$  puede ser

$$\begin{aligned} g(t) &= c_1 [\cos(2\pi|\xi|t) - i \sin(2\pi|\xi|t)] + c_2 [\cos(2\pi|\xi|t) + i \sin(2\pi|\xi|t)] \\ &= (c_1 + c_2) [\cos(2\pi|\xi|t)] + (c_2 - c_1) i [\sin(2\pi|\xi|t)] = d_1 \cos(2\pi|\xi|t) + d_2 i \sin(2\pi|\xi|t). \end{aligned}$$

Observamos que estas constantes  $d_1$  y  $d_2$  son distintas a las constantes anteriores  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente. Aunque nosotros no adoptaremos esta expresión de  $g(t)$  para calcular las soluciones.

La primera condición que teníamos era que  $g(0) = g_0$ . Entonces tenemos

$$g(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0$$

Luego lo primero que nos queda es  $c_1 + c_2 = g_0$ . La segunda condición que teníamos era que  $g'(0) = g_1$ . Vamos a calcular primero  $g'(t)$ :

$$g'(t) = -c_1 2i\pi|\xi| e^{-i2\pi|\xi|t} + c_2 2i\pi|\xi| e^{i2\pi|\xi|t}.$$

Ahora sustituimos y nos queda

$$g_1 = -c_1 2i\pi|\xi| + c_2 2i\pi|\xi|.$$

Luego tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = g_0 \\ g_1 = -c_1 2i\pi|\xi| + c_2 2i\pi|\xi| \end{cases}.$$

Del anterior sistema obtenemos que

$$c_1 = g_0 - c_2, \quad c_1 = c_2 - \frac{g_1}{2i\pi|\xi|}.$$

Luego obtenemos que las constantes  $c_1$  y  $c_2$  respecto de las condiciones iniciales  $g_0$  y  $g_1$  son:

$$c_1 = -\frac{g_1}{4i\pi|\xi|} + \frac{g_0}{2}, \quad c_2 = \frac{g_1}{4i\pi|\xi|} + \frac{g_0}{2}.$$

Por lo tanto, la solución  $g(t)$  es:

$$g(t) = \left(-\frac{g_1}{4i\pi|\xi|} + \frac{g_0}{2}\right) e^{-i2\pi|\xi|t} + \left(\frac{g_1}{4i\pi|\xi|} + \frac{g_0}{2}\right) e^{i2\pi|\xi|t},$$

donde  $g_0$  y  $g_1$  eran las transformadas de Fourier de  $u_0(0, \xi)$  y  $u_1(0, \xi)$ . Recordemos que habíamos denotado  $g(t) = \hat{u}(t, \xi)$ . Entonces tenemos

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{F}(\xi)e^{-i2\pi|\xi|t} + \hat{G}(\xi)e^{i2\pi|\xi|t},$$

en la cual hemos cambiado las constantes  $c_1$  y  $c_2$  por  $\hat{F}(\xi)$  y  $\hat{G}(\xi)$  respectivamente.

Veamos quienes son  $F$  y  $G$ :

$$\hat{F}(\xi) = \left(-\frac{g_1}{4i\pi|\xi|} + \frac{g_0}{2}\right) = \left(-\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right),$$

$$\hat{G}(\xi) = \left(\frac{g_1}{4i\pi|\xi|} + \frac{g_0}{2}\right) = \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right).$$

Por lo tanto,  $F$  y  $G$  son

$$F(x) = \left(-\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim = \left(-\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|}\right)^\sim + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim,$$

$$G(x) = \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim = \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|}\right)^\sim + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim.$$

Para encontrar nuestra incógnita  $u(t, x)$  vamos a utilizar la transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \hat{u}(t, \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} [\hat{F}(\xi)e^{-i2\pi|\xi|t} + \hat{G}(\xi)e^{i2\pi|\xi|t}] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \hat{F}(\xi) e^{-i2\pi|\xi|t} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \hat{G}(\xi) e^{i2\pi|\xi|t} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\xi) e^{2\pi i(x-t)\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\xi) e^{2\pi i(x+t)\xi} d\xi = F(x-t) + G(x+t). \end{aligned}$$

Cuando la ecuación de ondas viene dada por

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \Delta u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (3.4.3)$$

es decir, con una constante al cuadrado multiplicando al Laplaciano, se tiene la siguiente solución:

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Esta es la llamada forma de D'Alembert de la solución de la ecuación de ondas. La parte de la solución  $F(x - ct)$  representa a unas ondas moviéndose hacia la derecha con velocidad  $c$ . Esto podemos verlo debido a que todos los puntos  $(t, x)$  en el espacio toman el mismo valor de  $F(x - ct) = F(z)$  para cuando  $x - ct$  toma el valor de  $z$ . Entonces si en el tiempo  $t$ ,  $x = z + ct$ , es decir, nos movemos a la derecha con velocidad  $c$ , siempre se va a tener la misma altura de la cuerda (onda), como vamos a ver en el siguiente caso.

### Ejemplo 3.4.1

Tenemos el siguiente problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) - c^2 \Delta u(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = u_1(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

en el que tenemos dos condiciones iniciales. La primera condición va a ser una función dada, que luego indicaremos. La segunda condición nos indica que la velocidad en el instante  $t = 0$ , es decir, en el momento en que empezamos a estudiarlo, es igual a 0. Esto quiere decir que está en reposo.

Vamos a ver como podemos representar  $u(t, x)$  bajo estas condiciones que nos da el ejemplo. Para ello tendremos que utilizar una función  $u_0(x)$  concreta y ver cómo se comporta la solución con estas condiciones iniciales.

Tenemos el mismo problema de condiciones iniciales que en (3.4.3). Luego, de igual manera, la solución de D'Alembert toma la siguiente forma

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

donde  $F$  y  $G$  ya los habíamos calculado y nos quedaron:

$$F(x) = \left(-\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|}\right)^{\sim} + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^{\sim}, \quad G(x) = \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{4i\pi|\xi|}\right)^{\sim} + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^{\sim},$$

es decir, ambos están en función de las condiciones iniciales  $u_0(x)$  y  $u_1(x)$ . Si nos fijamos en estas condiciones, como la segunda de ellas es  $u_1(x) = 0$ , tenemos entonces que  $\hat{u}_1(\xi) = 0$ . Luego

$$F(x) = G(x) = \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^{\sim} = \frac{1}{2}(\hat{u}_0(\xi))^{\sim} = \frac{1}{2}u_0(x).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)].$$

Supongamos que el problema nos dice que  $u_0(x) = ke^{-x^2}$  es la condición inicial para la posición, donde  $k$  es una constante. Entonces la solución viene dada por

$$u(t, x) = \frac{k}{2}[e^{-(x - ct)^2} + e^{-(x + ct)^2}].$$

Ahora vamos a estudiar cómo se comporta la solución  $u(t, x)$ . Comenzaremos viendo cómo se comporta la parte de la solución  $u_0(x - ct)$  que habíamos explicado previamente a la introducción de este ejemplo.  $u_0(x - ct)$  viene expresada de la siguiente manera:

$$u_0(x - ct) = \frac{k}{2}e^{-(x - ct)^2}.$$

Si tomamos la constante  $k = 1$  y la velocidad  $c = 2$  y lo evaluamos en los tiempos  $t = 0$ ,  $t = 3$  y  $t = 6$  tenemos lo siguiente:

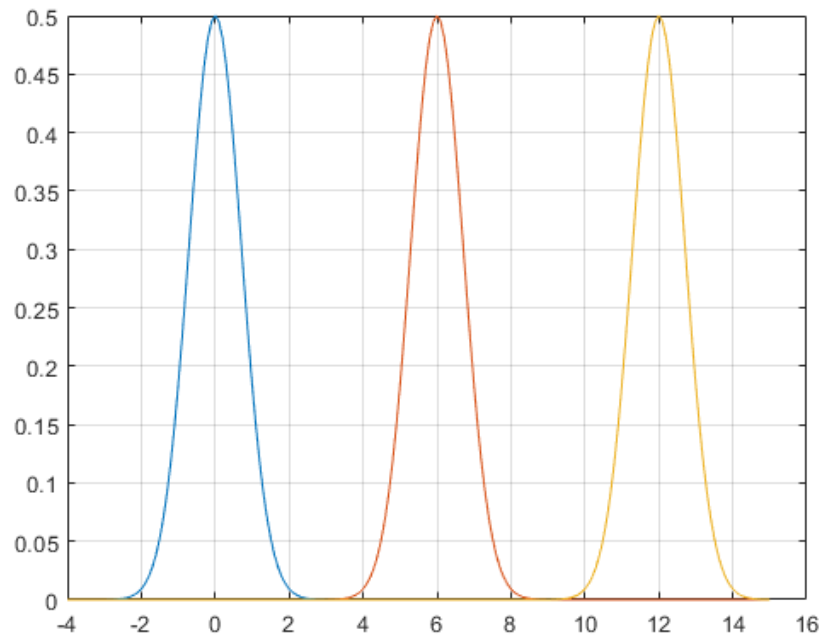


Figura 3.5: Representación de  $u_0(x - ct)$  de la forma de D'Alembert.

Observamos cómo se cumple lo que habíamos comentado de que la parte de la solución  $u_0(x - ct)$  representa a las ondas/cuerda moviéndose a una velocidad  $c$  hacia la derecha. De la misma manera, la parte de la solución  $u_0(x + ct)$  representa a las ondas moviéndose hacia la izquierda con velocidad  $c$ .  $u_0(x + ct)$  viene expresada de la siguiente manera:

$$u_0(x + ct) = \frac{k}{2} e^{-(x + ct)^2}.$$

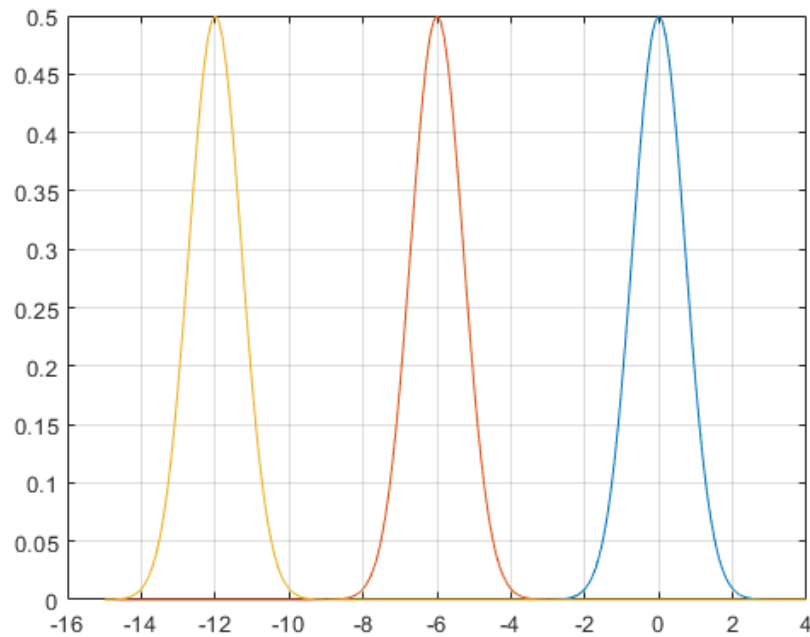


Figura 3.6: Representación de  $u_0(x + ct)$  de la forma de D'Alembert.

Podemos observar como para esta parte de la solución, las ondas tienen el mismo comportamiento, con la única salvedad de que ahora se mueven hacia la izquierda en vez de hacia la derecha. Los valores para las constantes y para el tiempo los hemos escogido exactamente iguales para que se pueda ver exactamente la misma gráfica que antes pero ahora con movimiento hacia la izquierda como hemos indicado.

Ahora vamos a ver como actúa la solución completa en una sola gráfica, es decir vamos a representar  $u(t, x)$  al completo. Elegiremos las constantes y los valores del tiempo iguales que en las figuras anteriores.

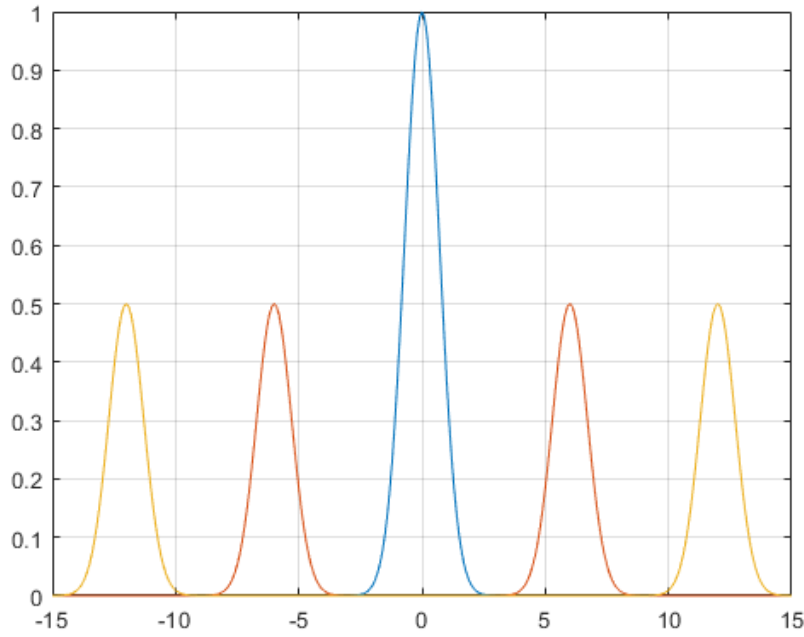


Figura 3.7: Representación de la solución  $u(t, x)$ .

En esta gráfica vemos cómo actúan las dos partes de la solución que habíamos estudiado por separado. Vemos como para el tiempo  $t = 0$  es el doble de tamaño que antes, debido a que en ese instante ambas partes de la solución son iguales y están sumándose. Después a ambos lados del origen, las ondas siguen lo que nos podríamos haber imaginado tras estudiar ambas partes de la solución por separado.

### Ejemplo 3.4.2

*Ahora tenemos el mismo problema pero con una función distinta en el dato inicial de la posición:*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) = c^2 \Delta u(t, x), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}, & \partial_t u(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

con  $\sigma > 0$  y donde el dato correspondiente a la posición inicial cambia respecto al ejemplo anterior y el dato referido a la velocidad inicial sigue siendo el mismo.

En este caso la solución de D'Alembert nos da lo siguiente:

$$u(t, x) = \frac{e^{-(x+ct)^2/2\sigma^2}}{2\sqrt{2\pi}\sigma} + \frac{e^{-(x-ct)^2/2\sigma^2}}{2\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

En este ejemplo, lo que vamos a hacer es interpretar el resultado mediante un contexto físico. Tenemos una cuerda que está tensa y se mantiene inmóvil. Si a la cuerda anterior la obligamos a tomar la forma de una gaussiana (condición inicial) y de repente la soltamos, se formarán dos gaussianas de un tamaño igual a la mitad de la gaussiana de la distorsión anterior y que se desplazarán hacia la izquierda y hacia la derecha con una velocidad de onda  $c$  de igual manera que en el estudio que realizamos anteriormente.

### 3.5. Ecuación del Telégrafo

La ecuación del telégrafo es una ecuación que describe el voltaje y la corriente en una línea de transmisión eléctrica con la distancia y el tiempo.

La ecuación del telégrafo es

$$u_{tt} + (\alpha + \beta)u_t + \alpha\beta u = c^2\Delta u.$$

La estudiaremos sujeta a unas condiciones iniciales. Se tiene que  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . La incógnita vuelve a ser  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Delta u$  es el Laplaciano de  $u$ . Observamos que si  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$ , tenemos la ecuación de ondas de nuevo. Consideraremos sólo el caso en que  $\alpha, \beta > 0$ . Tenemos entonces el siguiente problema de condiciones iniciales para la ecuación del telégrafo

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + (\alpha + \beta)\partial_t u(t, x) + \alpha\beta u(t, x) = c^2\Delta u(t, x), & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (3.5.1)$$

Utilizando ahora la transformada de Fourier en la variable  $x$  en (3.5.1) obtenemos lo siguiente

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) + (\alpha + \beta)\partial_t \hat{u}(t, \xi) + \alpha\beta \hat{u}(t, \xi) = -c^2 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases}. \quad (3.5.2)$$

Todo esto es debido a

- $\widehat{\partial_t^2 u}(t, \xi) = \partial_t^2 \hat{u}(t, \xi).$
- $\widehat{(\alpha + \beta)\partial_t u}(t, \xi) = (\alpha + \beta) \widehat{\partial_t u}(t, \xi) = (\alpha + \beta)\partial_t \hat{u}(t, \xi).$
- $\widehat{\alpha\beta u}(t, \xi) = \alpha\beta \hat{u}(t, \xi).$
- $\widehat{c^2\Delta u}(t, \xi) = c^2(2\pi i)^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = -c^2 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi).$
- $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi).$
- $\widehat{\partial_t u}(\xi, 0) = \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi).$



Por lo tanto, nos queda que (3.5.2) es una EDO para la variable  $t$  con un  $\xi$  fijo. Denotamos  $\hat{u}(t, \xi) = g(t)$  y nos queda el siguiente problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} g''(t) + (\alpha + \beta)g'(t) + \alpha\beta g(t) = -c^2 4\pi^2 |\xi|^2 g(t) \\ g(0) = g_0, \quad g'(0) = g_1 \end{cases}.$$

Reordenando los términos nos queda

$$\begin{cases} g''(t) + (\alpha + \beta)g'(t) + (\alpha\beta + c^2 4\pi^2 |\xi|^2)g(t) = 0 \\ g(0) = g_0, \quad g'(0) = g_1 \end{cases},$$

la cual es una EDO de segundo orden de coeficientes constantes. La resolvemos igual que la ecuación de ondas. Si  $g(t) = e^{rt}$ , entonces  $g'(t) = re^{rt}$  y  $g''(t) = r^2 e^{rt}$ . Sustituimos en la ecuación que estamos estudiando

$$e^{rt}(r^2 + (\alpha + \beta)r + (\alpha\beta + c^2 4\pi^2 |\xi|^2)) = 0.$$

Para hacer más sencillos los cálculos vamos a tomar  $k(\xi) = 2\pi|\xi|$ . Luego  $k^2 = 4\pi^2|\xi|^2$  y nos queda

$$e^{rt}(r^2 + (\alpha + \beta)r + (\alpha\beta + c^2 k^2)) = 0.$$

Como  $e^{rt} \neq 0$  se cumple siempre, entonces también se cumple

$$\begin{aligned} r &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta + c^2 k^2)}}{2} = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 4c^2 k^2}}{2} = \\ &= \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2}}{2}. \end{aligned}$$

Si  $(\alpha - \beta)^2 \geq 4c^2 k^2$ , entonces los dos valores de  $r$  son reales negativos. Se puede ver en lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 \leq (\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2 \leq (\alpha - \beta)^2 &\implies 0 \leq \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2} \leq |\alpha - \beta| \implies \\ \implies -|\alpha - \beta| \leq \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2} \leq |\alpha - \beta| &\implies \\ \implies \frac{-(\alpha + \beta) - |\alpha - \beta|}{2} \leq \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2}}{2} &\leq \frac{-(\alpha + \beta) + |\alpha - \beta|}{2}. \end{aligned}$$

Como

$$|\alpha - \beta| = \begin{cases} \alpha - \beta & \text{si } \alpha \geq \beta \\ \beta - \alpha & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases},$$

entonces

$$r = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2}}{2}$$

es un número real entre  $-\alpha$  y  $-\beta$ , luego ambos valores de  $r$  son negativos como habíamos dicho. Entonces ambas soluciones de  $g(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0$ . Por lo tanto, consideraremos que  $\hat{u}(t, \xi)$  es 0 salvo que  $4c^2 k^2 > (\alpha - \beta)^2$ , y en ese caso:

$$r = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4c^2 k^2}}{2} = \frac{-(\alpha + \beta)}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{4c^2 k^2 - (\alpha - \beta)^2} = -\sigma \pm i\omega(k),$$

donde

$$\sigma = \frac{(\alpha + \beta)}{2} \quad y \quad \omega(k) = \sqrt{4c^2k^2 - (\alpha - \beta)^2}.$$

Entonces la solución de la EDO es

$$g(t) = c_1 e^{(-\sigma - i\omega(k))t} + c_2 e^{(-\sigma + i\omega(k))t} = e^{-\sigma t} [c_1 e^{-i\omega(k)t} + c_2 e^{i\omega(k)t}].$$

La dos condiciones son iguales que en la ecuación de ondas. Haciendo el mismo proceso, obtenemos que

$$c_1 = -\frac{g_1}{2i\omega(k)} + \frac{g_0}{2} \quad y \quad c_2 = \frac{g_1}{2i\omega(k)} + \frac{g_0}{2}.$$

Por lo tanto, la solución de  $g(t)$  es:

$$g(t) = \left(-\frac{g_1}{2i\omega(k)} + \frac{g_0}{2}\right) e^{(-\sigma - i\omega(k))t} + \left(\frac{g_1}{2i\omega(k)} + \frac{g_0}{2}\right) e^{(-\sigma + i\omega(k))t}.$$

donde  $g_0$  y  $g_1$  eran las transformadas de Fourier de  $u_0(0, \xi)$  y  $u_1(0, \xi)$ . Habíamos denotado  $g(t) = \hat{u}(t, \xi)$ , luego

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{F}(\xi) e^{(-\sigma - i\omega(k))t} + \hat{G}(\xi) e^{(-\sigma + i\omega(k))t}.$$

en la cual hemos cambiado las constantes  $c_1$  y  $c_2$  por  $\hat{F}(\xi)$  y  $\hat{G}(\xi)$  respectivamente. Veamos quienes son  $F$  y  $G$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\xi) &= -\frac{g_1}{2i\omega(k)} + \frac{g_0}{2} = -\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}, \\ \hat{G}(\xi) &= \frac{g_1}{2i\omega(k)} + \frac{g_0}{2} = \frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}. \end{aligned}$$

Al igual que antes, obtenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(-\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim = \left(-\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)}\right)^\sim + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim, \\ G(x) &= \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)} + \frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim = \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)}\right)^\sim + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim. \end{aligned}$$

Y para encontrar  $u(t, x)$  vamos a utilizar la transformada inversa:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \hat{u}(t, \xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} [\hat{F}(\xi) e^{(-\sigma - i\omega(k(\xi)))t} + \hat{G}(\xi) e^{(-\sigma + i\omega(k(\xi)))t}] d\xi \\ &= e^{-\sigma t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \hat{F}(\xi) e^{(-i\omega(k(\xi)))t} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x \cdot \xi)} \hat{G}(\xi) e^{(i\omega(k(\xi)))t} d\xi \right] \\ &= e^{-\sigma t} [F(x - ct) + G(x + ct)]. \end{aligned}$$

Y al igual que en la ecuación de ondas, tenemos unas ondas que se mueven a derecha con velocidad  $c$  y otras que se mueven a izquierda con velocidad  $c$ . Las ondas no cambian de forma con respecto a la ecuación de ondas, pero el factor que multiplica en esta solución respecto a la solución de la ecuación de ondas hace que el tamaño vaya disminuyendo con el tiempo  $t$ .

**Ejemplo 3.5.1** Como en el caso anterior vamos a verlo en un ejemplo práctico. Consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + (\alpha + \beta) \partial_t u(t, x) + \alpha \beta u(t, x) = c^2 \Delta u(t, x), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = ke^{-x^2}, \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

con dos condiciones iniciales. La primera una función dada  $u_0(x)$  que es la misma que para el caso de la ecuación de ondas y la segunda, una condición que al igual que en el caso anterior nos indica que la velocidad en el tiempo  $t = 0$  es cero, es decir, se encuentra en reposo. Vamos a representar  $u(t, x)$  y ver si cómo se diferencia de la representación de la solución del ejemplo de la ecuación de ondas.

Entonces la solución  $u(t, x)$  es de la siguiente forma:

$$u(t, x) = F(x - ct) + F(x + ct)$$

siendo

$$F(x) = \left(-\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)}\right)^\sim + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim, \quad G(x) = \left(\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\omega(k)}\right)^\sim + \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim.$$

Al igual que antes, como la segunda condición es  $u_1(x) = 0$ , entonces  $\hat{u}_1(\xi) = 0$ , y por lo tanto,

$$F(x) = G(x) = \left(\frac{\hat{u}_0(\xi)}{2}\right)^\sim = \frac{1}{2}(\hat{u}_0(\xi))^\sim = \frac{1}{2}u_0(x).$$

Finalmente

$$u(t, x) = e^{-\sigma t} \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)].$$

Como hemos dicho, hemos considerado  $u_0(x)$  igual que antes,  $u_0(x) = ke^{-x^2}$  con  $k$  una constante. Entonces la solución es

$$u(t, x) = e^{-\sigma t} \frac{k}{2} [e^{-(x - ct)^2} + e^{-(x + ct)^2}].$$

Veamos cómo se comporta de nuevo  $u(t, x)$ . Vamos a volverlo a ver por separado y en conjunto. Sean

$$v_1(t, x) = e^{-\sigma t} \frac{k}{2} [e^{-(x - ct)^2}],$$

$$v_2(t, x) = e^{-\sigma t} \frac{k}{2} [e^{-(x + ct)^2}].$$

Vamos a tomar al igual que antes  $k = 1$  y  $c = 2$  y lo vamos a evaluar en los mismos valores para el tiempo:  $t = 0$ ,  $t = 3$  y  $t = 6$ . Para el valor de la constante  $\sigma$  hemos tomado 1.

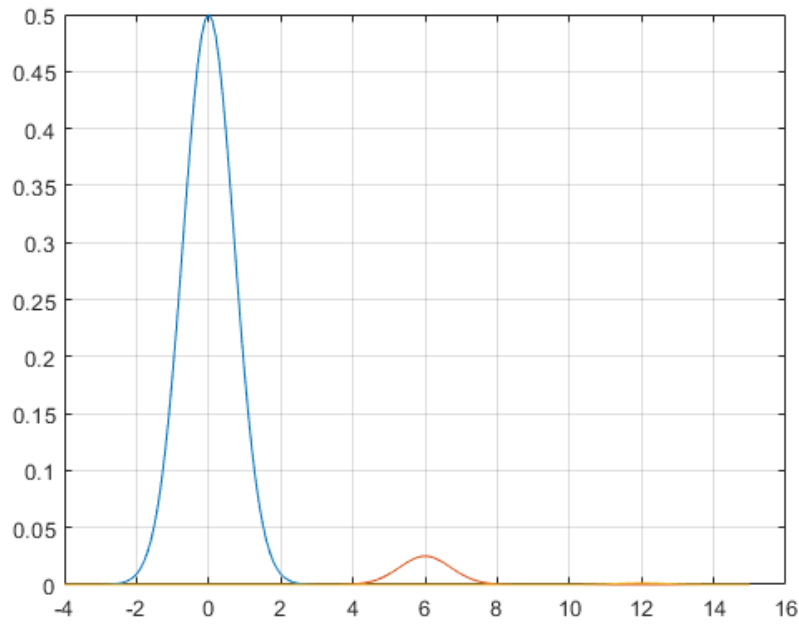


Figura 3.8: Representación de  $v_1(t, x)$  en un caso similar a la anterior figura.

Observamos en esta primera gráfica, como efectivamente, la forma de las ondas no cambia pero a tiempos mayores el tamaño disminuye de tal manera que para  $t = 6$ , se acerca a valores muy próximos a cero, pero siempre sin ser cero, debido a que es una exponencial y nunca puede tomar este valor. Para el tiempo  $t = 0$ , es la misma que en la ecuación de ondas porque el factor que la multiplica ahora sería  $e^0 = 1$ . De la misma forma, vamos ver cómo resulta la otra parte de la solución,  $v_2(t, x)$ , que ya intuimos que será igual que la anterior, pero ahora con las ondas moviéndose hacia la parte izquierda.

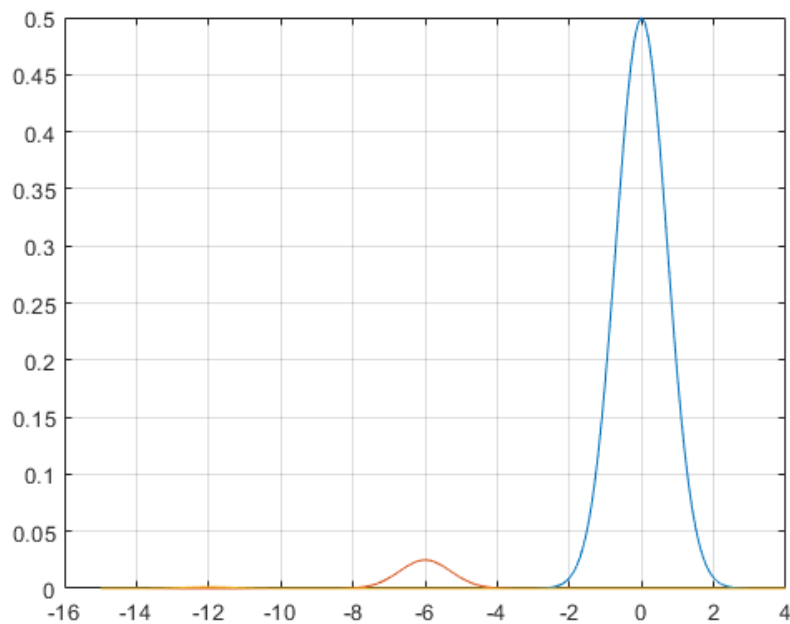


Figura 3.9: Representación de  $v_2(t, x)$  en un caso similar a la anterior figura.

Efectivamente, observamos como para el tiempo  $t = 0$ , tiene los mismos valores que la otra parte de la solución, y según el tiempo crece, las ondas se mueven hacia la izquierda en este caso y con la misma disminución en el tamaño que para la otra parte de la solución.

Y ahora, por último, veremos si la solución al completo se comporta de la misma manera que antes o si hay algún cambio.

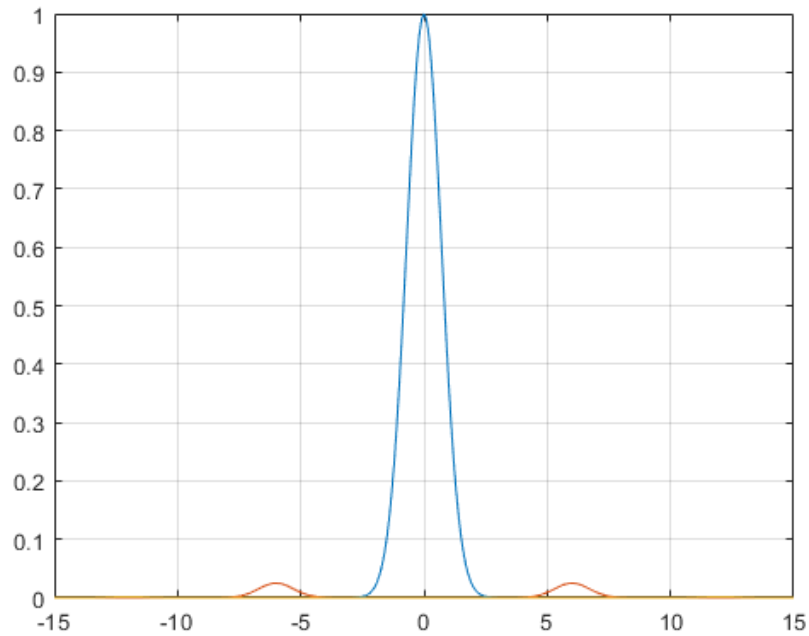


Figura 3.10: Representación de la solución entera  $u(t, x)$ .

Observamos como sí que se ha cumplido lo que intuíamos, al haber hecho el ejemplo anterior. Para  $t = 0$ , el tamaño es el doble que en cada uno de los casos separados que hemos estudiado de las partes de la solución, porque como antes, en esos instantes las dos partes de la solución son iguales y cómo se están sumando, ocurre esto. Y para lo sucedido a ambos lados del origen, podemos ver cómo ocurre lo mismo que en cada una de las partes de la solución.



# Capítulo 4

## Conclusiones

En esta última parte del trabajo, vamos a resumir los principales resultados que hemos visto y obtenido en cada uno de los capítulos anteriores.

En el primer capítulo, hemos visto quién era Jean-Baptiste Joseph Fourier y hemos nombrado algunas de las muchas contribuciones que ha aportado a la ciencia, bien sea a la matemática, a la física o a la ingeniería. En la mayoría de las aportaciones que comentamos, aparecía el término *transformada de Fourier*, que es el tema sobre el que hemos realizado este proyecto, pero centrándonos obviamente en el sentido matemático y en las aplicaciones que tiene la transformada para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Después, en el segundo capítulo, hemos visto la transformada de Fourier en los espacios  $L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , comenzando por la definición y demostrando varias propiedades y teoremas referidos a la transformada en cada espacio, en los que luego nos hemos tenido que apoyar para calcular algunos ejemplos y en el último capítulo para estudiar las EDPs.

Respecto a las pruebas más importantes realizadas en la parte de la transformada en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  podemos encontrar el Lema de Riemann-Lebesgue, la transformada de Fourier de la traslación, del operador dilación y el producto de convolución. Después hemos realizado numerosos ejemplos en los que hemos calculado la transformada de Fourier para diferentes funciones. Más tarde, hemos introducido algunas propiedades sobre como se relacionan la derivada y la transformada de Fourier. Para finalizar la parte de la transformada de Fourier en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  hemos dado una expresión y una prueba de la transformada de Fourier inversa.

Luego, en la subsección referida a la transformada de Fourier en el espacio  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , hemos probado el Teorema de Plancherel ( $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ ) que tiene una gran importancia y que es necesario para exponer la definición de la transformada en este espacio.

En el último capítulo, hemos procedido al estudio de cinco ecuaciones en derivadas parciales ayudándonos de lo visto hasta el momento en el trabajo.

La primera de ellas fue la Ecuación Lineal de Schrödinger en la sección (3.1). Se buscan soluciones en  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Por tanto, que admitan transformada de Fourier. Con la ayuda de la transformada de Fourier en la variable espacial, reducimos la ecuación en derivadas parciales que tenemos en el problema de condiciones iniciales para una EDO en la variable temporal, fijando la variable espacial. Resolvemos la EDO con  $\xi$  fijo y por lo visto en el Ejemplo (2.1.3) y en la Proposición (2.1.1), obtenemos la expresión de la transformada de Fourier de  $u(t, x)$ , la solución del problema de Cauchy para la Ecuación de Schrödinger y la solución fundamental de la Ecuación de Schrödinger.

Aquí es la primera vez que nos ha aparecido el término *solución fundamental de una ecuación*. Este término lo estudiaremos también en la Ecuación del Calor.

Finalmente, utilizando la transformada de Fourier inversa y el producto de convolución, obtenemos  $u(t, x)$  como convolución entre el dato inicial y una función  $\Phi(t, x)$  que no depende del dato, si no sólo de EDP. Esta función  $\Phi(t, x)$  se conoce como la solución fundamental de la Ecuación de Schrödinger.

La segunda de las ecuaciones fue la Ecuación del Calor en la sección (3.2). La resolución es similar a la ecuación anterior. Al igual que en el anterior, obtuvimos la solución fundamental de la ecuación, que en este caso, la representamos gráficamente y explicamos desde el punto de vista físico.

En la sección (3.3) hemos estudiado la Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV). El comienzo de la resolución de ésta fue similar a las dos previas, pero tuvimos que introducir el concepto de *Airy function* y utilizar su aproximación numérica calculada por Matlab para poder continuar con el estudio de la solución de la Ecuación de KdV.

Después, en la sección (3.4) estudiamos la Ecuación de Ondas. Para transformar la EDP en una EDO volvimos a utilizar la transformada de Fourier en la variable espacial. Tras resolverlo para el caso general dimos una expresión más utilizada para este problema, en la que la solución se llama *forma de D'Alembert*. Más tarde, vimos dos ejemplos concretos para los cuáles nos daban unas condiciones iniciales para el problema de Cauchy. En el primero de ellos, estudiamos cómo se comportaba la solución, separándola en dos partes y después la solución entera. En el segundo ejemplo, dimos una explicación física para entender la solución de esa ecuación.

Y por último, en la sección (3.5) estudiamos la Ecuación del Telégrafo, que resolvimos de manera muy parecida a la de la Ecuación de Ondas y para la que también vimos un ejemplo en el que estudiamos el comportamiento de la solución.



# Capítulo 5

## Anexo

### 5.1. Los espacios $L^p$

#### Definición 5.1.1

Una norma en  $X$  es una aplicación que  $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$  que verifica:

$$(1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$$

$$(2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X$$

$$(4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$$

#### Definición 5.1.2

Un espacio normado es un espacio vectorial dotado de una norma.  
Se representa por  $(X, \|\cdot\|)$ .

#### Definición 5.1.3

Sea  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  medible.

Definimos  $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x$ .

Para  $1 < p < \infty$ ,  $\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d^n x \right)^{\frac{1}{p}}$

Para  $p = \infty$ ,  $\|f\|_\infty = \inf\{c \in [0, \infty] : |f(t)| \leq c \text{ en casi todo punto}\}$

Entonces para  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos los espacios normados como:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f = g \text{ en casi todo punto y } \|g\|_p < \infty\}$$

Para concluir, vamos a ver el producto interno en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Sean  $f$  y  $g$  dos funciones en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces el producto interno de  $f$  y  $g$  viene dado por la siguiente expresión:

$$(f, g) = \int f(x)g(x)dx.$$

En caso de funciones con valores complejos, el producto interno en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  se define como:

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx.$$

**Definición 5.1.4**

$L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  es un conjunto denso de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  y de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Esto quiere decir lo siguiente:

- $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  es un conjunto denso en  $L^1(\mathbb{R}^n)$  si para cualquier  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  se tiene que  $\forall \epsilon > 0, \exists g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|f - g\|_1 = \int |f(x) - g(x)| dx < \epsilon.$$

- $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  es un conjunto denso en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  si para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  se tiene que  $\forall \epsilon > 0, \exists h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|f - h\|_2 = \left( \int |f(x) - h(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \epsilon.$$

**5.2. Cálculo de integrales utilizadas en el trabajo****Observación 5.2.1**

Vamos a comprobar que el valor de la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ .

Solución:

Sea  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$ . Entonces, tenemos que:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-y^2} dz dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z^2 + y^2)} dz dy.$$

La región donde estamos integrando es  $D = \{(z, y) : -\infty \leq z \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty\}$ . Cambiamos a coordenadas polares y la nueva región es  $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Por tanto,

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi.$$

Entonces, como  $I^2 = \pi$ , tenemos que  $I = \sqrt{\pi}$ , como queríamos ver.

**Observación 5.2.2**

Vamos a calcular  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx$ .

Solución:

Vamos a ayudarnos de la observación (5.2.1) previamente resuelta también en el anexo. Si tomamos el siguiente cambio de variable:  $\pi x^2 = z^2$ , luego  $x = \frac{z}{\sqrt{\pi}}$  y  $dx = \frac{dz}{\sqrt{\pi}}$ . Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = 1.$$

**Observación 5.2.3**

Veamos el paso (1) del ejemplo (2.1.3). Vamos a demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-2\pi y + iy/2)^2} dy \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-2\pi y)^2} dy$$

Demostración:

Sea  $C(y) = 2\pi y + i\frac{y}{2}$  una curva parametrizada en  $\mathbb{C}$ , con  $y \in \mathbb{R}$  parámetro. Queremos ver qué nos da la siguiente integral:

$$\int_{-2\pi R}^{2\pi R} e^{-C(y)^2} dy.$$

Para ello tenemos el siguiente camino:

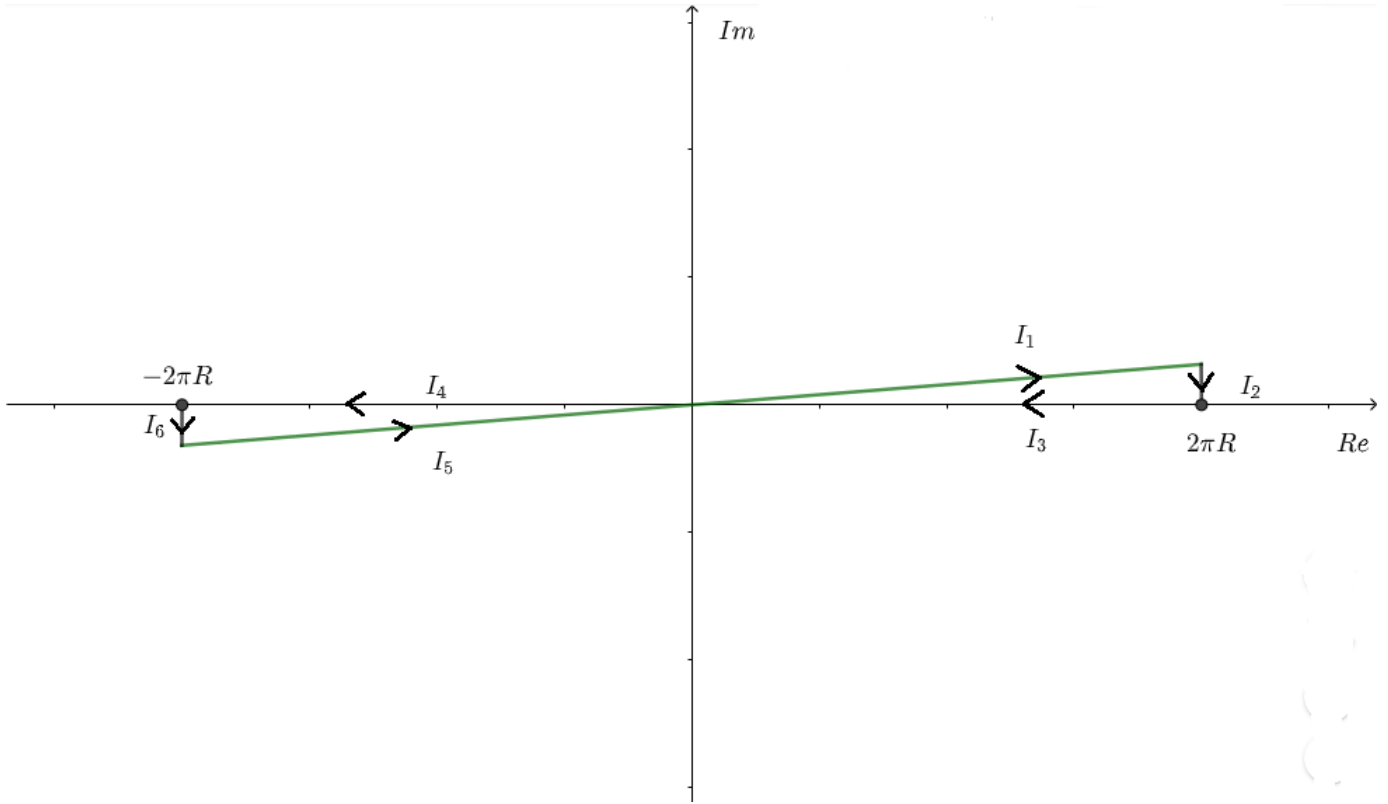


Figura 5.1: Camino de  $C(y)$

donde  $(2\pi y, \frac{y}{2}) \in \{(u, \frac{u}{4\pi})\}$ . Sabemos que por el Teorema de Cauchy para un Triángulo, si  $f$  es una función holomorfa (analítica) definida en un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$  y  $\Delta$  es un triángulo cerrado contenido en ese abierto, entonces

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

(a)  $I_1 + I_2 + I_3 = 0,$

(b)  $I_4 + I_6 + I_5 = 0,$

(c) Necesitamos ver que  $I_1 + I_5 = \int_{-2\pi R}^{2\pi R} e^{-C(y)^2} dy.$

Con (a) y (b) obtenemos que  $I_1 + I_5 = -I_2 - I_3 - I_4 - I_6$ . Tenemos que  $I_2 + I_6 = 0$ , porque

$$I_2 : c(t) = it \quad \text{si } t \in [0, 2\pi R],$$

$$I_6 : c(t) = -it \quad \text{si } t \in [0, 2\pi R].$$

Luego  $I_1 + I_5 = -I_3 - I_4$ .

$$I_3 : c(t) = 2\pi R - t \quad \text{si } t \in [0, 2\pi R],$$

$$I_4 : c(t) = -t \quad \text{si } t \in [0, 2\pi R].$$

Veamos quiénes son  $I_3$  y  $I_4$ :

$$I_3 = \int_0^{2\pi R} e^{-(2\pi R - t)^2} (-t)' dt = - \int_0^{2\pi R} e^{-(2\pi R - t)^2} dt = - \int_0^{2\pi R} e^{-z^2} dz.$$

donde hemos hecho el siguiente cambio de variable  $z = 2\pi R - t$  para obtener la anterior expresión de  $I_3$ . Y ahora mostramos la expresión de  $I_4$ :

$$I_4 = \int_0^{2\pi R} e^{-(-t)^2} (-t)' dt = - \int_0^{2\pi R} e^{-t^2} dt.$$

Por tanto,

$$I_1 + I_5 = 2 \int_0^{2\pi R} e^{-t^2} dt.$$

Cuando  $R \rightarrow \infty$ , se tiene:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_1 + I_5 = \lim_{R \rightarrow \infty} 2 \int_0^{2\pi R} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Si sustituimos  $t = 2\pi y$ , se obtiene (1).

### Ejemplo 5.2.1

*Vamos a calcular el valor de la integral*

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx,$$

para  $\alpha > 0$ .

Solución:

Esta integral ya la hemos visto para casos concretos, cuando  $\alpha = 1$  y  $\alpha = \pi$  durante los ejemplos (2.1.3) y (2.1.7) respectivamente. Pero ahora vamos a hacerlo de una manera alternativa y utilizando la transformada de Fourier. En este ejemplo, para calcularla vamos a apoyarnos en el operador dilatación de la propiedad (5) descrita en la primera sección del capítulo. Tenemos que

$$f(\alpha x) = e^{-\alpha x^2} = e^{-\pi(\sqrt{\alpha}x/\sqrt{\pi})^2}.$$

Vamos a utilizar la propiedad del operador dilatación que hemos comentado antes para ver cómo actúa la transformada de Fourier sobre él. El operador dilatación lo denotábamos por  $(\delta_\alpha f)(x) = f(\alpha x)$  para  $\alpha > 0$  y su transformada de Fourier es  $\widehat{(\delta_\alpha f)}(\xi) = \frac{1}{a} \widehat{f}(a^{-1}\xi)$ .

Entonces por lo visto en el ejemplo anterior donde  $\widehat{(e^{-\pi x^2})} = e^{-\pi \xi^2}$  y por la propiedad del operador dilatación que hemos comentado, obtenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{f(\alpha x)}(\xi) &= (\widehat{e^{-\alpha x^2}})(\xi) = (\widehat{e^{-\pi(\sqrt{\alpha}x/\sqrt{\pi})^2}})(\xi) = \widehat{\delta_\alpha f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}(\widehat{e^{-\pi x^2}})(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\xi) = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi(\sqrt{\pi}\xi/\sqrt{\alpha})^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi(\pi\xi^2/\alpha)} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2\xi^2/\alpha}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i(x \cdot 0)} dx = (\widehat{e^{-\alpha x^2}})(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 \cdot 0/\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Podemos observar si tomamos  $\alpha = 1$  y  $\alpha = \pi$ , como llegamos a los valores obtenidos en los ejemplos (2.1.3) y (2.1.7) mediante una técnica distinta.

### 5.3. Notaciones con respecto a las derivadas

#### Definición 5.3.1

Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Para cada multi-índice  $\alpha$ , siendo  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ , se tiene que

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{(\alpha)} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

con  $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

#### Definición 5.3.2

El operador laplaciano ( $\Delta$ ) es un operador diferencial de segundo orden en un espacio  $n$ -dimensional, definido como la divergencia ( $\nabla$ ) del gradiente ( $\nabla f$ ). Entonces, si  $f$  es una función dos veces diferenciable, el laplaciano de  $f$  está definido por:

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$$

donde  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ .

Equivalentemente, el laplaciano de  $f$  es la suma de todas las derivadas segundas parciales sin las derivadas cruzadas en  $x_i$ :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Esta última notación será la que utilicemos en las ecuaciones que estudiamos en este trabajo.

### 5.4. Delta de Dirac

#### Definición 5.4.1 Delta de Dirac

La función Delta de Dirac (función  $\delta$ ) es una función o distribución generalizada que fue introducida por el físico Paul Dirac. Esta función es utilizada para modelar una carga puntual como una función igual a cero en todo punto excepto para el origen que vale infinito. Como hemos dicho la podemos entender como una función o como una distribución. Como una función, tenemos la siguiente expresión:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

*Y como una distribución:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0).$$

*Cuando en un problema de Cauchy se da como dato inicial la función Delta de Dirac, la solución de la EDP se llama solución fundamental de la EDP. Esta solución fundamental sirve para describir el resto de ecuaciones.*

*En este TFG no introducimos la transformada de Fourier para distribuciones, como es  $\delta(x)$  por falta de espacio. Utilizamos que  $\mathcal{F}(\delta(\cdot))(\xi) = 1$ , donde 1 es la función constante y que  $\delta * g = g$ ,  $\forall$  función  $g$ .*

# Bibliografía

- [1] J. M. Almira, Un matemático al servicio de la física: Fourier, RBA, 2017.
- [2] G. Ponce, F. Linares, Introduction to nonlinear dispersive equations, Springer, 2009.
- [3] D. W. Kammler, A first course in Fourier Analysis, Cambridge, 2007.
- [4] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 2010.
- [5] L.A. Fernández, Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales, Universidad de Cantabria, 2018.
- [6] J. Vinuesa, Ampliación de Cálculo Integral, Universidad de Cantabria, 2017.
- [7] V. Serov, Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics, Springer, 2017.
- [8] G.B. Arfken, H.J. Weber, Mathematical methods for physicists, Harcourt/Academic Press, 2001.
- [9] Anónimo. Schrödinger Equation [Página web]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Schrodinger\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Schrodinger_equation) [Consulta: 25 Marzo 2020].
- [10] Anónimo. Heat Equation [Página web]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Heat\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation) [Consulta: 26 Marzo 2020].
- [11] Anónimo. Korteweg-de Vries Equation [Página web]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg-de\\_Vries\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg-de_Vries_equation) [Consulta: 26 Marzo 2020].
- [12] Anónimo. Numerical Solution of the KdV Equation [Página web]. [https://wikiwaves.org/Numerical\\_Solution\\_of\\_the\\_KdV](https://wikiwaves.org/Numerical_Solution_of_the_KdV) [Consulta: 28 Marzo 2020].
- [13] Anónimo. Airy function [Página web]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Airy\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Airy_function) [Consulta: 15 Abril 2020].
- [14] Anónimo. Fundamental Solution Heat Equation [Página web]. [https://www.researchgate.net/figure/Fundamental-solution-to-the-heat-equation-at-different-time-moments-Note-that-if-t-0\\_fig7\\_301700649](https://www.researchgate.net/figure/Fundamental-solution-to-the-heat-equation-at-different-time-moments-Note-that-if-t-0_fig7_301700649) [Consulta: 5 Septiembre 2020].
- [15] Anónimo. Wave Equation [Página web]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Wave\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation) [Consulta: 21 Septiembre 2020]
- [16] Anónimo. Telegraph Equation [Página web]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Telegrapher%27s\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Telegrapher%27s_equations) [Consulta: 21 Septiembre 2020]